

APOSTILA

Cálculo Diferencial e Integral II

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

- UTFPR -

Professores: Lauro César Galvão
Luiz Fernando Nunes

Índice

1

| | | |
|-----|---------------------------------------|-----|
| 1 | Integrais Impróprias | 1-1 |
| 1.1 | Limites infinitos de integração | 1-3 |

| | | |
|--------|---|------|
| 3.3 | Função Beta (β)..... | 3-5 |
| 3.3.1 | Definições Decorrentes | 3-6 |
| 3.4 | Exercícios | 3-7 |
| 4 | Tópicos de Topologia dos Espaços Reais n-Dimensionais | 4-1 |
| 4.1 | O Espaço Vetorial \mathfrak{R}^n | 4-1 |
| 4.2 | Produto Interno em \mathfrak{R}^n | 4-2 |
| 4.3 | Norma de $x \in \mathfrak{R}^n$ ou Comprimento do Vetor $x \in \mathfrak{R}^n$ | 4-2 |
| 4.3.1 | Propriedades da Norma Euclideana $(x = \sqrt{\langle x, x \rangle})$ | 4-2 |
| 4.4 | Distância em \mathfrak{R}^n | 4-3 |
| 4.4.1 | Propriedades das Distâncias em \mathfrak{R}^n | 4-3 |
| 4.5 | Bolas e Conjuntos Limitados..... | 4-4 |
| 4.5.1 | Definição: Segmento de Reta | 4-5 |
| 4.5.2 | Definição: Conjunto Convexo | 4-5 |
| 4.5.3 | Definição: Ponto de Acumulação | 4-5 |
| 4.5.4 | Definição: Conjunto Limitado..... | 4-5 |
| 4.5.5 | Definição: Ponto Interior..... | 4-5 |
| 4.5.6 | Definição: Ponto Exterior..... | 4-5 |
| 4.5.7 | Definição: Ponto Fronteira | 4-5 |
| 4.5.8 | Definição: Conjunto Aberto | 4-6 |
| 4.5.9 | Definição: Conjunto Fechado | 4-6 |
| 4.5.10 | Definição: Conjunto Conexo | 4-6 |
| 4.5.11 | Definição: Região Aberta..... | 4-7 |
| 4.5.12 | Definição: Região Fechada..... | 4-7 |
| 4.6 | Exercícios | 4-8 |
| 5 | Funções em Espaços n-Dimensionais | 5-1 |
| 5.1 | Introdução..... | 5-1 |
| 5.2 | Limites e Continuidade de Funções de n-Variáveis Reais..... | 5-7 |
| 5.2.1 | Limites de Funções em \mathfrak{R}^n | 5-7 |
| 5.2.2 | Continuidade de Funções em \mathfrak{R}^n | 5-9 |
| 6 | Derivadas..... | 6-1 |
| 6.1 | Derivadas Parciais..... | 6-1 |
| 6.1.1 | Incremento parcial e incremento total..... | 6-1 |
| 6.1.2 | Regras de derivação | 6-4 |
| 6.1.3 | Derivadas Parciais Sucessivas | 6-8 |
| 6.1.4 | Interpretação Geométrica das Derivadas Parciais..... | 6-10 |
| 6.1.5 | Equações das Retas Tangentes | 6-11 |
| 6.1.6 | Diferenciabilidade..... | 6-14 |
| 6.2 | Gradiente | 6-20 |
| 6.3 | Diferenciais..... | 6-22 |
| 6.3.1 | Generalizando as diferenciais | 6-23 |
| 6.4 | Derivadas de Funções Compostas..... | 6-26 |
| 6.4.1 | Regra da Cadeia para Funções de Duas Variáveis Intermediárias | 6-26 |
| 6.4.2 | Regra da Cadeia para Funções de Três Variáveis Intermediárias..... | 6-27 |
| 6.4.3 | Regra da Cadeia para Duas Variáveis Independentes e Três Variáveis Intermediárias | 6-28 |
| 6.4.4 | Regra da Cadeia Generalizada..... | 6-29 |
| 6.4.5 | Derivadas de Funções Implícitas | 6-31 |
| 6.5 | Máximos e Mínimos de Funções de Várias Variáveis..... | 6-34 |
| 6.5.1 | Teorema de Weierstrass | 6-37 |
| 6.5.2 | Aplicações: Exercícios | 6-38 |
| 7 | Integrais Duplas e Triplas..... | 7-1 |

| | | |
|-------|---|------|
| 7.1 | Introdução..... | 7-1 |
| 7.2 | Integrais Duplas | 7-3 |
| 7.2.1 | Interpretação Geométrica | 7-4 |
| 7.2.2 | Área da Região D..... | 7-4 |
| 7.2.3 | Propriedades das Integrais Duplas | 7-4 |
| 7.3 | Cálculo de Integrais Duplas..... | 7-5 |
| 7.3.1 | Teorema para o Cálculo de Integrais Duplas..... | 7-5 |
| 7.3.2 | Definição: Integrais Iteradas..... | 7-6 |
| 7.4 | Mudança de Variáveis em Integrais Duplas | 7-9 |
| 7.5 | Coordenadas Polares | 7-10 |
| 7.5.1 | Obtenção da fórmula | 7-10 |
| 7.5.2 | Área $\Delta A'$ do retângulo em D' | 7-10 |
| 7.5.3 | Área ΔA do retângulo polar em D | 7-11 |
| 7.5.4 | Integral dupla em D' | 7-11 |
| 7.6 | Cálculo de Volumes (Aplicações)..... | 7-13 |
| 7.7 | Cálculo de Áreas de Regiões Planas | 7-15 |
| 7.8 | Integrais Triplas | 7-16 |
| 7.9 | Cálculo de Integrais Triplas..... | 7-17 |
| 7.10 | Mudança de Variáveis em Integrais Triplas | 7-19 |
| 7.11 | Integrais Triplas em Coordenadas Cilíndricas..... | 7-20 |
| 7.12 | Integrais Triplas em Coordenadas Esféricas | 7-21 |
| 7.13 | Aplicações Físicas da Integral Dupla..... | 7-23 |
| 7.14 | Aplicações Físicas da Integral Tripla..... | 7-25 |
| 7.15 | Exercícios | 7-28 |
| 8 | Formulário e Referências | 8-1 |
| 8.1 | Formulário de Derivadas e Integrais..... | 8-1 |
| 8.2 | Referências Bibliográficas..... | 8-2 |

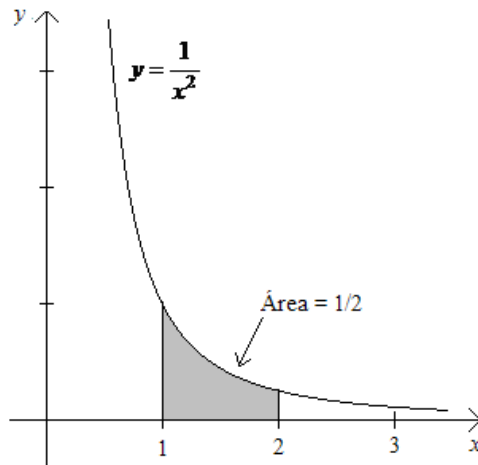
1 Integrais Impróprias

Na definição das integrais definidas $\int_a^b f(x)dx$, foi assumido que o intervalo de integração de a até b era finito. Além disso, era necessário que a imagem do integrando fosse finita neste domínio. Em outras palavras, a função f era definida em todos os pontos do intervalo limitado $[a, b]$ e f não tinha descontinuidades infinitas neste intervalo.

Agora estenderemos o conceito de integral definida para os casos onde o intervalo de integração é infinito e também para os casos onde a função f tem descontinuidades infinitas em $[a, b]$.

Primeiramente, para motivar uma definição razoável para integrais com limites infinitos de integração, considere o problema de calcular a área da superfície situada abaixo da curva que representa o gráfico da função de regra $y = \frac{1}{x^2}$, acima do eixo das abscissas e à direita da reta $x = 1$ (perceba que esta região se estende infinitamente à medida que os valores de x crescem). Normalmente a intuição nos leva a imaginar erroneamente que a referida área é infinita, pois estamos acostumados a raciocinar sobre dimensões finitas. Desta forma, vamos num primeiro momento, calcular a área hachurada na primeira das figuras abaixo, isto é, a

área dada pela integral $\int_1^2 \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^2 = \left[-\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{1}\right)\right] = \frac{1}{2}$.



Analogamente, se quisermos calcular a área até a reta $x=3$, obtemos

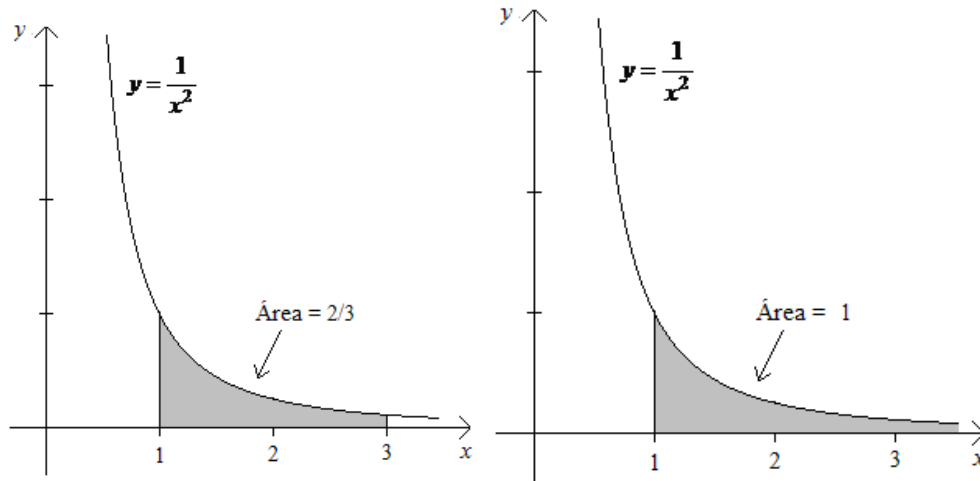
$$\int_1^3 \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^3 = \left[-\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{1}\right)\right] = \frac{2}{3}.$$

Da mesma forma, se a região cuja área que está sendo calculada estiver limitada à esquerda pela reta $x=1$ e à direita pela reta $x=4$, podemos obter:

$$\int_1^4 \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^4 = \left[-\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{1}\right)\right] = \frac{3}{4}.$$

Prosseguindo desta forma, percebemos que se limitarmos a referida área pela reta $x=t$, e aumentarmos cada vez mais o valor de t , isto é, fazendo $t \rightarrow \infty$, a área da região em questão se aproxima cada vez mais de 1. No entanto, dependendo da função que limita superiormente a área que estamos calculando o resultado poderá ser diferente. Por exemplo,

se neste mesmo caso substituirmos a função de regra $y = \frac{1}{x^2}$ pela regra $y = \frac{1}{x}$, a referida área seria infinita.

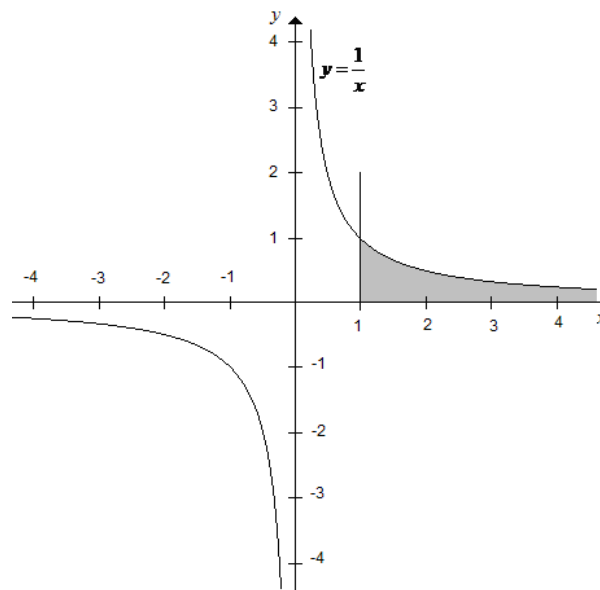


Usando esta discussão como guia, será possível definirmos precisamente o significado de integral imprópria onde o limite de integração é infinito.

Mas antes disto, vamos apresentar uma outra questão para motivar ainda mais os estudos das integrais impróprias:

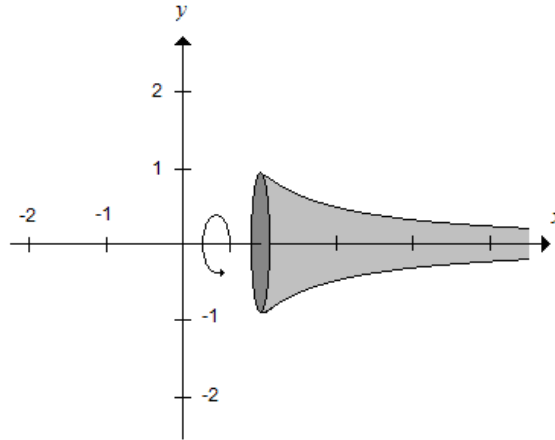
Pergunta: É possível de se pintar um muro de área infinita com o conteúdo de uma lata de tinta de volume finito?

Antes de responder a esta pergunta, considere o seguinte problema: Calcular a área da superfície situada abaixo da curva que representa o gráfico da função de regra $y = f(x) = \frac{1}{x}$, acima do eixo das abscissas e à direita da reta $x = 1$, isto é, calcule a área da região hachurada da figura que segue (perceba que esta região se estende infinitamente à medida que os valores de x crescem).



Será mostrado, neste capítulo, que a referida área será dada por uma integral chamada de integral imprópria e será representada por $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = +\infty$. Assim, a referida área é infinita.

Agora imagine que a região hachurada do problema anterior gira em torno do eixo das abscissas. Neste caso, será gerado o sólido de revolução apresentado na figura seguinte. Este sólido recebe o nome de “Corneta de Gabriel”. Qual seria então o volume deste sólido?



Depois de apresentadas as definições de integrais impróprias, será visto que o volume deste sólido pode ser dado também por uma integral imprópria representada por $\int_1^{+\infty} \pi \cdot \frac{dx}{x^2} = \pi$. Isto significa que o volume solicitado é igual a π unidades de volume.

Desta forma, o volume de um sólido de revolução, gerado por uma superfície de área infinita pode ter um volume finito.

Retornando para a questão inicial, foi sugerido que se alguém pudesse saturar o interior deste sólido com tinta e permitir que esta fosse filtrada para a superfície, então poderia pintar uma superfície infinita com uma quantidade de tinta finita! O que você acha?

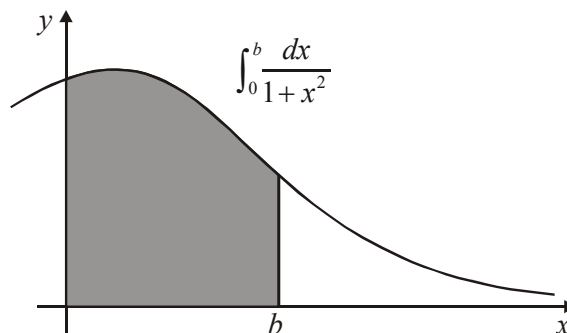
1.1 Limites infinitos de integração

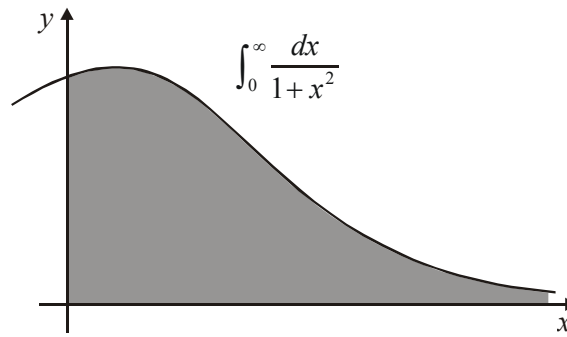
Seja f uma função definida e contínua para todo x tal que $a \leq x \leq b$. Então

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx \quad (01)$$

Se este limite existe (como um número real).

Pode-se dizer ainda que, caso exista o limite, a integral imprópria **converge** e, caso não exista, a integral imprópria **diverge**.





De forma análoga são definidas as outras integrais impróprias com limites infinitos:

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x)dx \quad (02)$$

Se este limite existe (como um número real).

Novamente, dizemos que, caso exista este limite, a integral imprópria **converge** e, caso não exista, a integral imprópria **diverge**.

Finalmente, se os dois limites de integração são infinitos temos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x)dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b f(x)dx \quad (03)$$

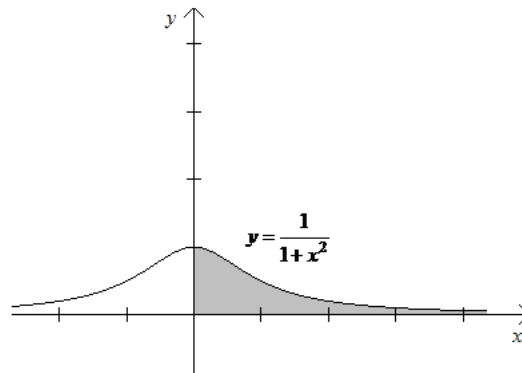
Se estes limites existirem (como números reais).

Neste caso, dizemos que integral imprópria **converge** se ambos os limites existirem e que, a integral imprópria **diverge**, se qualquer um dos limites não existir.

Em todos estes casos, quando dizemos que um limite existe, estamos assumindo que o mesmo tem como resultado um número real.

Exemplos

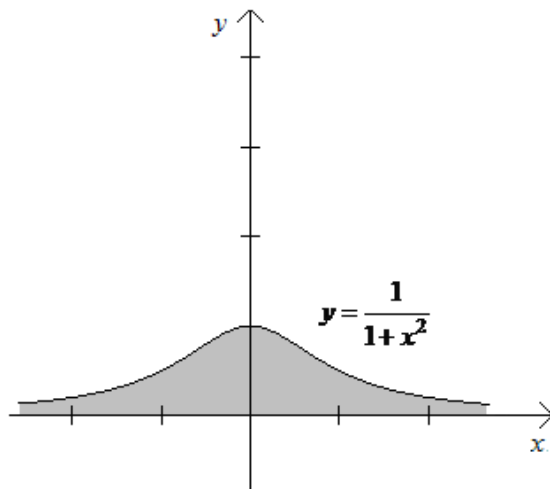
1. Calcular $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.



Resolução:

Resposta: $\frac{\pi}{2}$

2. Calcular $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.



Resolução:

Resposta: π

3. Calcule a integral e o limite dos itens seguintes:

a) $\int_{-\infty}^{+\infty} x dx$ e b) $\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-r}^r x dx$

a)

Resolução:

Resposta: diverge

b)

Resolução:**Resposta:** 0

Desta forma, este exemplo ilustra o porquê de não podemos utilizar o limite em (b) para definir a integral imprópria em (a).

4. Discutir os valores de α para os quais a integral $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ converge ou diverge.

Resolução:**Resposta:** DIVERGE

5. Verifique os resultados das seguintes integrais do exemplo citado no começo deste capítulo, onde se propõe que um muro de área infinita seja pintado com o conteúdo de uma lata de tinta de volume finito, isto é: $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = +\infty$ e que $\int_1^{+\infty} \pi \cdot \frac{dx}{x^2} = \pi$.

Resolução:**Resposta:** $+\infty$ e π , respectivamente.

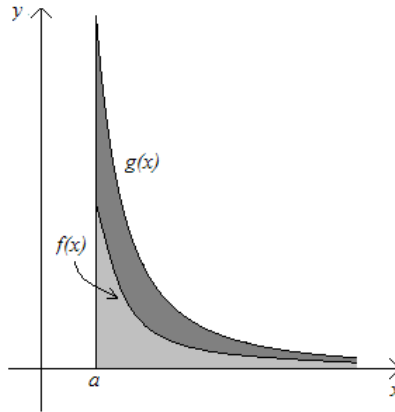
1.1.1 Testes de Comparação

Muitas vezes não podemos resolver uma integral imprópria diretamente, então tentamos primeiramente determinar se ela é convergente ou divergente. Caso ela seja convergente, podemos utilizar métodos numéricos para resolvê-la de forma aproximada. Para auxiliar nesta tarefa de decidir se a integral converge ou diverge alguns teoremas podem ser utilizados:

Teorema

Se, $\forall x \geq a$, $0 \leq f(x) \leq g(x)$ e se $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ converge, então $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ também converge e $\int_a^{+\infty} f(x) dx \leq \int_a^{+\infty} g(x) dx$.

A prova deste teorema está sendo omitida, no entanto, a figura que segue o faz parecer plausível.

**Exemplo**

6. Estudar a convergência da integral $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)}$.

Resolução:

Resposta: CONVERGE

Teorema

Se, $\forall x \geq a$, $0 \leq \varphi(x) \leq f(x)$ e se $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$ diverge, então $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ também diverge.

Exemplo

7. Estudar a convergência da integral $\int_1^{+\infty} \frac{(x+1)}{\sqrt{x^3}} dx$.

Resolução:

Resposta: DIVERGE**Teorema**

Se $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ converge, então $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ também CONVERGE.

Observação

Diz-se que a última integral é absolutamente convergente.

Exemplo

8. Estudar a convergência da integral $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^3} dx$.

Resolução:**Resposta:** CONVERGE**1.2 Integrandos com descontinuidades infinitas****Definição**

Se a função f é contínua no intervalo $]a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx \quad (04)$$

se este limite existir (como um número real).

Definição

Se a função f é contínua no intervalo $]a, b[$, então

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx \quad (05)$$

se este limite existir (como um número real).

Definição

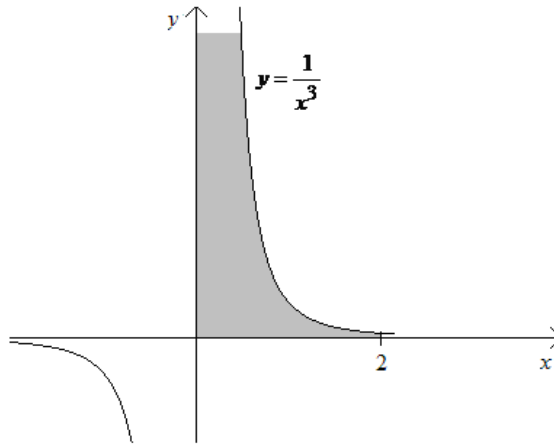
Se a função f é contínua no intervalo $[a,b]$ exceto em c tal que $a < c < b$, então

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{c+\delta}^b f(x)dx \quad (06)$$

se os limites existirem (como números reais).

Exemplos

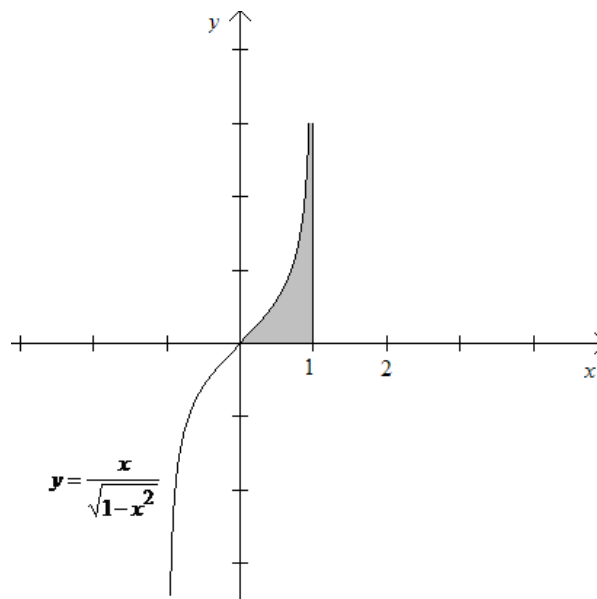
9. Calcular $\int_0^2 \frac{2dx}{x^3}$.



Resolução:

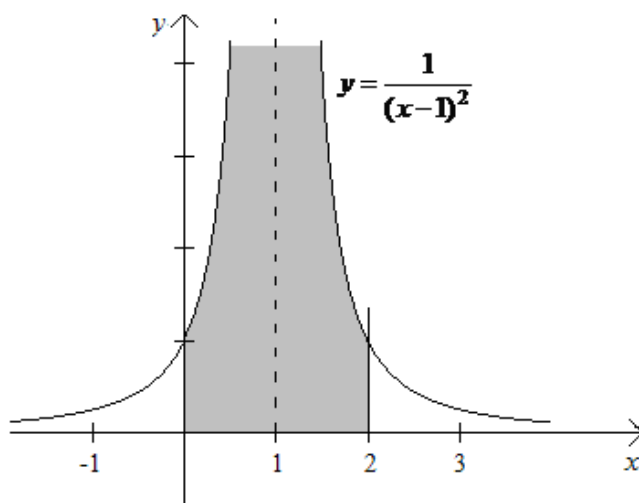
Resposta: DIVERGE

10. $\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$.



Resolução:**Resposta:** 1

11. Calcular $\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$.

**Resolução:****Resposta:** DIVERGE

ATENÇÃO: Muitas vezes pode parecer “tentador” aplicar o Teorema Fundamental do Cálculo diretamente a uma integral imprópria, sem utilizar os limites apropriados. Para ilustrar o que pode acontecer, vamos ignorar que a integral deste exemplo é imprópria:

$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = \left[-\frac{1}{x-1} \right]_0^2 = -1 - (-1) = 0$ o que é errado, pois como o integrando nunca é negativo, o valor desta integral também não poderia ser.

Outros Exemplos de Integrais Impróprias

Calcular as seguintes integrais impróprias:

12. $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$.

Resolução:

Resposta: 1

13. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{a^2 + x^2}$.

Resolução:

Resposta: $\frac{\pi}{2a}$

14. $\int_0^{+\infty} x \sin x dx$.

Resolução:

Resposta: DIVERGE

15. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Resolução:**Resposta:** DIVERGE

16. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$.

Resolução:**Resposta:** π

17. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$.

Resolução:**Resposta:** $\frac{3}{2}$

18. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^4}$.

Resolução:**Resposta:** DIVERGE

$$19. \int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin(bx) dx.$$

Resolução:

Resposta: $\frac{b}{a^2 + b^2}$

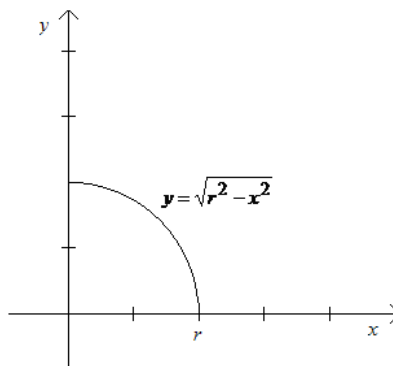
1.3 Algumas aplicações das integrais impróprias

1.3.1 Cálculo do comprimento de uma circunferência

Deduzir a fórmula $C = 2 \cdot \pi \cdot r$ para o cálculo do comprimento da circunferência de um círculo de raio r .

Para simplificar os cálculos vamos admitir que o círculo tem o centro na origem e raio r , assim, sua equação será $x^2 + y^2 = r^2$. Iremos considerar o comprimento do arco que está no primeiro quadrante e depois multiplicar o resultado por 4, obtendo o comprimento total da circunferência.

Como o semicírculo superior é dado por $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, temos que o comprimento de curva procurado será dado por:



$$C = 4 \cdot \int_0^r \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = 4 \cdot \int_0^r \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2} dx = 4 \cdot r \cdot \int_0^r \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

Esta última integral é imprópria, pois existe uma descontinuidade infinita em $x = r$, assim:

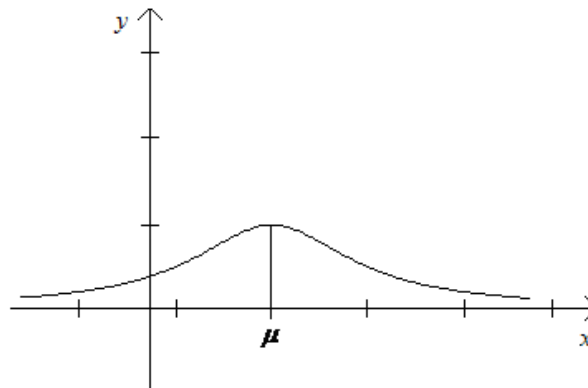
$$C = 4 \cdot r \cdot \lim_{b \rightarrow r^-} \int_0^b \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 4 \cdot r \cdot \lim_{b \rightarrow r^-} \left[\arcsin\left(\frac{x}{r}\right) \right]_0^b = 4 \cdot r \cdot \lim_{b \rightarrow r^-} \left[\arcsin\left(\frac{b}{r}\right) - \arcsin(0) \right]$$

$$C = 4 \cdot r \cdot \lim_{b \rightarrow r^-} [\arcsin(1) - \arcsin(0)] = 4 \cdot r \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = 2 \cdot \pi \cdot r.$$

1.3.2 Aplicações em estatística

As integrais impróprias são amplamente utilizadas na teoria das probabilidades.

Por exemplo, a função cuja regra é $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ é chamada de função da densidade de probabilidade normal, com média μ e desvio padrão σ . O número μ indica onde a distribuição de probabilidades está centralizada, enquanto que o parâmetro σ indica a dispersão em torno da média.



Esta função possui, entre outras, as seguintes características:

- a distribuição é simétrica em relação a $x = \mu$, pois f é uma função par;
- a função f tem um ponto de máximo para $x = \mu$;
- a função f é duplamente assintótica ao eixo das abscissas, ou seja, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$;
- a função admite dois pontos de inflexão para $x = \mu \pm \sigma$.
- A área sob a curva normal entre dois pontos é a probabilidade de uma variável normalmente distribuída tomar um valor entre estes pontos.

Da teoria das probabilidades é mostrado que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$.

1.3.3 Aplicações em transformadas integrais

Sejam $f(t)$ e $g(p,t)$, funções de variáveis t e p , a integral imprópria $\int_0^{+\infty} f(t) \cdot g(p,t) dt = F(p)$ produz uma nova função da variável p , indicada por $F(p)$ e chamada de Transformada Integral de $f(t)$.

Há vários tipos de transformadas integrais, por exemplo as Transformadas de Laplace e as Transformadas de Fourier, que são muito utilizadas para encontrar soluções de equações diferenciais.

A função $g(p,t)$ é chamada de núcleo da transformação. Por exemplo: Se $g(p,t) = e^{-pt}$, então a transformada de $f(t)$ é chamada de Transformada de Laplace. Se $g(w,t) = e^{\pm iwt}$, a transformada de $f(t)$ é chamada de Transformada de Fourier de $f(t)$.

A transformada de Laplace transforma uma equação diferencial em uma equação algébrica, facilitando a sua resolução.

Estudos mais aprofundados das transformadas integrais, bem como das equações diferenciais serão efetuados em outras disciplinas mais específicas.

1.3.4 Função Gama e Função Fatorial

Definida pelo matemático Leonard Euler, a função Gama é definida através da seguinte integral imprópria:

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$$

Γ é uma função convergente quando $n > 0$. Por exemplo: Para $n=1$:

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} x^{1-1} e^{-x} dx = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{e^x} \right]_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{e^b} \right) = 1.$$

Este assunto será estudado de forma mais detalhada em um capítulo posterior, onde será mostrado, entre outras coisas, que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ e apresentada uma fórmula conhecida por “Fórmula de Recorrência”, que é:

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n! \quad (n=1, 2, 3, \dots).$$

Desta forma, a função gama generaliza a função fatorial, sendo possível estender as definições destes para todo número real pertencente ao conjunto $\Re - \{0, -1, -2, \dots\}$.

Além de aplicações na estatística, a função Gama também possibilita o cálculo de diversas integrais que seriam complicadas de serem resolvidas por métodos convencionais, como por exemplo:

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx = \Gamma(n)$$

$$u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2} x^{-1} du$$

$$x = u^{\frac{1}{2}} \Rightarrow dx = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} du.$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^{\infty} e^{-u} \cdot \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} du = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} u^{\frac{1}{2}-1} e^{-u} du = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}.$$

1.3.5 Integrais Impróprias no Campo da Economia

São muitas as aplicações das integrais impróprias na economia. Por exemplo, suponha que exista um fluxo contínuo de receita para o qual o juro é acumulado continuamente à taxa de 100 i por cento e $f(t)$ reais é a receita por ano, em qualquer tempo de t anos. Se a receita continuar indefinidamente, o valor atual, V reais, de toda receita futura é dado pela seguinte integral imprópria:

$$V = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-it} dt.$$

1.4 Resolvendo integrais impróprias com o uso do software MAPLE

Na seqüência apresentamos um exemplo do uso do MAPLE para resolver integrais impróprias:

Calcule a integral $\int_2^{+\infty} \frac{x+3}{(x-1) \cdot (x^2+1)} dx$

Inserimos os dados da seguinte forma:

>f := (x+3) / ((x-1)*(x^2+1));

Na seqüência utilize o comando de integração

>int(f, x=2..infinity);

O Software MAPLE fornece a resposta:

$$-\frac{1}{2}\pi + \ln(5) + \arctan(2).$$

Para se obter o valor numérico desta expressão, podemos utilizar o comando de cálculo **evalf**, especificando o número de dígitos, da seguinte forma:

>evalf(“”,6);

O símbolo (“”) indica ao computador para calcular o valor da última expressão da tela, neste caso $-\frac{1}{2}\pi + \ln(5) + \arctan(2)$. Assim, o valor fornecido será 1,14579.

1.5 Exercícios Propostos

Resolva os seguintes exercícios sobre integrais impróprias:

20. Calcular $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$

Resolução:

Resposta: 1

21. Calcular $\int_0^{\infty} x e^{-x} dx$

Resolução:

Resposta: 1

22. Calcular $\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2}$

Resolução:**Resposta:** 1

23. Calcular $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\frac{1}{4} + x^2}$

Resolução:**Resposta:** 2π

24. Calcular $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx$

Resolução:**Resposta:** 2

25. Calcular $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

Resolução:

Resposta: $\frac{\pi}{2}$

26. Calcular $\int_0^2 \frac{dx}{x-2}$

Resolução:**Resposta:** DIVERGE

27. Calcular $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^4}$

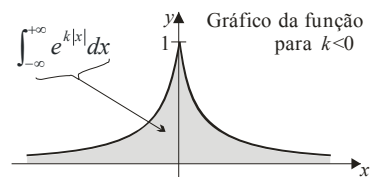
Resolução:**Resposta:** DIVERGE

28. Calcular $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 9}$

Resolução:

Resposta: $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$

29. Determine k para que se tenha $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{k|x|} dx = \frac{1}{2}$.



Obs: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{k|x|} dx = \frac{1}{2} \Rightarrow k < 0$

Resolução:

Resposta: $k = -4$

30. Utilize o teste da comparação para concluir se as integrais seguintes convergem ou divergem:

a) $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$

Resolução:

Resposta: CONVERGE

b) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 0,1}} dx$

Resolução:

Resposta: DIVERGE

2 Sistema de Coordenadas Polares e Integrais

2.1 Como as abelhas se comunicam?

Lionel S. Gonçalves-FFCLRP-USP-Ribeirão Preto-SP

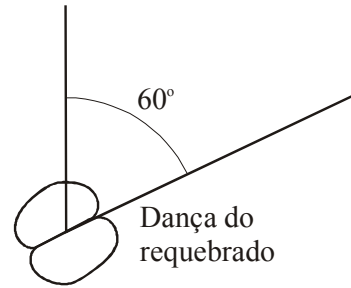
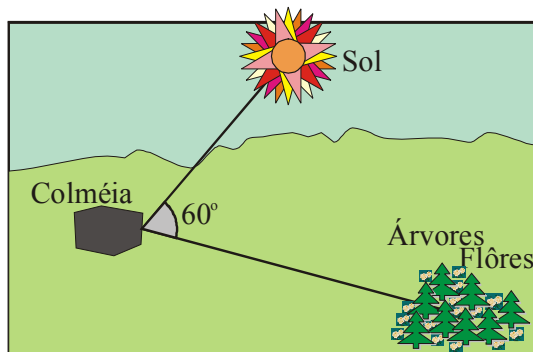
As abelhas são insetos que pertencem à ordem dos Himenóptera, tendo surgido na face da terra há mais de 50 milhões de anos (Figura a seguir) e sempre presentes em civilizações antigas como dos gregos e egípcios, há mais de cinco séculos (Figura seguinte). Existem abelhas solitárias, semi-sociais e sociais, sendo a comunicação o principal fator que as distingue quanto a sua sociabilidade. A comunicação entre elas é tanto mais elaborada e complexa quanto mais evoluído e social for seu grupo. As abelhas sem ferrão (*Meliponas*) e as abelhas do mel, ou *Apis mellifera* são as mais evoluídas.



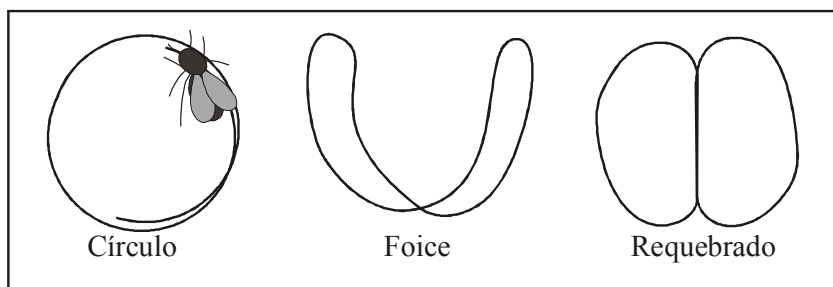
A comunicação é a troca ou transferência de mensagens ou informações entre dois ou mais seres vivos. Para que isso ocorra há a necessidade de um código prévio de sinais ou informações que constituirão a base da linguagem a ser usada na comunicação. Esses sinais podem ser físicos, químicos, biológicos ou uma combinação deles apresentados na forma de reações do organismo, movimentos, produção de substâncias (feromônios) etc. A comunicação pode apresentar tal complexidade que o próprio ser humano muitas vezes é incapaz de interpretar o significado de certos sinais usados na linguagem dos animais.

Entre os diversos aspectos da vida dos animais talvez a comunicação seja o que mais fascina os cientistas. Neste aspecto destacamos o pesquisador austríaco Karl von Frisch, que após 50 anos de estudos sobre comunicação das abelhas, recebeu o Prêmio Nobel de Medicina e Fisiologia em 1973, pelas suas descobertas. A comunicação entre as abelhas pode ser através de sinais químicos ou cheiros, sons ou ruídos e danças ou movimentos rítmicos os quais são usados para comunicarem a localização de alimentos, água, locais de nidificação, presença de inimigos, atração sexual, agregação, abandono do ninho etc. Portanto, as abelhas apresentam linguagem que lhes permitem não apenas se comunicarem entre si como também lhes garantem a sobrevivência da espécie.

As *Apis mellifera* ou abelhas de mel ou abelhas Europa são dotadas de um sistema de comunicação dos mais complexos e precisos entre os animais. Em 1788 o reverendo Ernst Spitzner já havia relatado a existência de movimentos especiais (danças) de algumas abelhas no favo, porém desconhecia o significado dessas danças. A explicação do significado da dança das abelhas deu-se somente a partir de 1920, em Luz am See, na Austria, por Karl von Frisch, que demonstrou, experimentalmente, que as abelhas campeiras, após localizarem uma fonte de alimento, retornam para casa (colmeia) e informam às companheiras, com grande precisão, onde se encontra a fonte de alimento. Estas informações são transmitidas por intermédio de danças especiais (Figura a seguir) que indicam a direção e a distância onde se encontra a fonte de alimento (von Frisch, 1953).



Existem três tipos de danças: “dança em círculo”, “dança em foice” e “dança do requebrado” (Figura seguinte) (von Frisch & Lindauer, 1956). Segundo esses mesmos autores existem inclusive dialetos na comunicação das abelhas. Quando a fonte de alimento se encontra a pequenas distâncias da colméia é executada a dança em círculo. Quando a fonte se encontra a grandes distâncias é executada a dança do requebrado, e a distâncias intermediárias é executada a dança em foice. A abelha utiliza o sol como sua bússola, sendo extremamente importante sua localização para que seja informado o local da fonte de alimento (árvore com flores). As abelhas enxergam o sol mesmo através das nuvens (raios ultravioletas). No entanto, não necessitam ver o sol enquanto dançam, podendo executar as danças mesmo no escuro, no interior da colméia. Por outro lado, as abelhas são capazes de se orientar mesmo após o pôr do sol. Na “dança do requebrado” a abelha, após chegar da fonte de alimento, procura se comunicar com as companheiras no favo, inicialmente oferecendo alimento (trofalaxis) e a seguir executa movimentos rítmicos do abdômen. A direção em que a dança é feita no favo, em relação ao fio de prumo, fornece um ângulo que corresponde exatamente ao ângulo formado entre a fonte de alimento (árvore com flor), posição do sol e colméia. À medida que o sol se movimenta a abelha corrige o ângulo correspondente. As abelhas operárias que assistem a dança, ao saírem da colméia, localizam a fonte de alimento, tomando por base o ângulo informado na dança. Se o ângulo é de 45 graus a direita do fio de prumo, se orientam com ângulo de 45 graus à direita do sol para localizar o alimento. A distância é informada pelo som produzido pelas vibrações do abdômen. Ao se aproximarem da flor elas usam as células sensoriais (sensillas) localizadas nas suas antenas que captam os sinais químicos ou cheiros. Os olhos compostos (omatídeos) e olhos simples (ocelos) auxiliam na localização exata da fonte de alimento.



Gonçalves (1969) comprovou experimentalmente que as abelhas *Apis mellifera* usam tanto o cheiro (67%) como a dança (33%) para se comunicar. As abelhas sem ferrão não realizam danças, comunicando-se por sinais sonoros e sinais químicos (trilhas de cheiros) (Kerr, 1960; Kerr & Esch, 1965 e Lindauer & Kerr, 1960). As mamangavas (*Bombus*) não produzem sons nem danças, sendo as abelhas mais primitivas quanto a comunicação. Portanto, graças ao complexo sistema de órgãos sensoriais (antenas, olhos) e das danças, as abelhas *Apis mellifera* apresentam um dos mais perfeitos sistemas de comunicação entre os animais. A vida das abelhas é tão fascinante que desde o início da civilização elas estavam presentes entre os povos de cultura, sendo consideradas pelos gregos e egípcios, há mais de 500 anos antes de Cristo, como o “Símbolo do bem estar”. Mesmo hoje em qualquer parte do

mundo, são encontrados estudiosos que procuram entender cada vez mais o maravilhoso mundo organizado desses importantes insetos que tantos benefícios trazem ao homem.

2.2 Coordenadas Polares

O sistema de coordenadas mais utilizado é o cartesiano. Porém, existem outros sistemas de coordenadas que podem ser usados. Um deles que pode ser comparado em importância ao sistema de coordenadas cartesianas é o **sistema de coordenadas polares**.

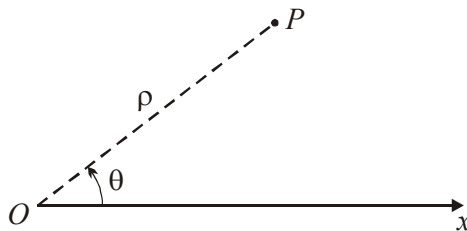
No sistema de coordenadas polares no plano, as coordenadas consistem de uma distância e da medida de um ângulo em relação a um ponto fixo e a um raio fixo (semi-eixo).

O ponto fixo é chamado **pólo** (origem) representado pela letra “ O ”. O raio fixo é chamado de **eixo polar** (reta polar) representado por “ Ox ”.

A cada ponto P do plano, são associadas suas coordenadas polares (ρ, θ) que consistem em:

ρ = Distância do pólo O ao ponto P .

θ = Ângulo entre o eixo polar e a reta \overrightarrow{OP} .

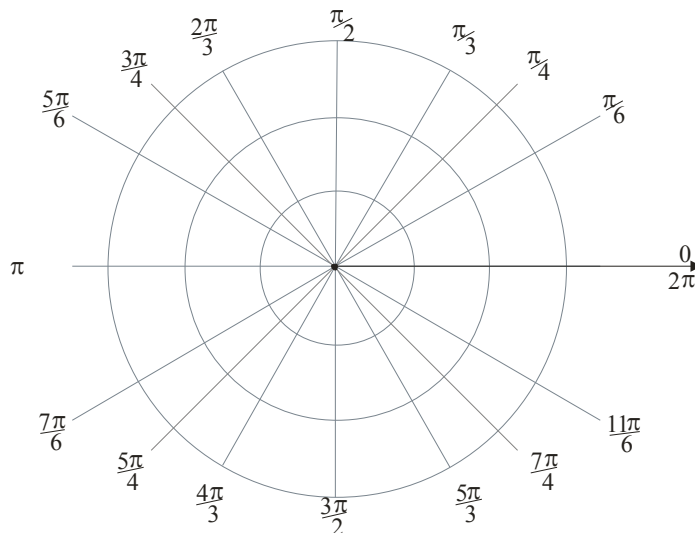


Exemplos

1. Represente no plano os pontos (ρ, θ) onde:

$$A(1,0), B(-1,0), C\left(2, \frac{\pi}{4}\right), D\left(-1, \frac{\pi}{4}\right), E\left(2, \frac{\pi}{3}\right), F\left(3, \frac{5\pi}{6}\right) \text{ e } G\left(-3, \frac{8\pi}{3}\right).$$

Resolução:

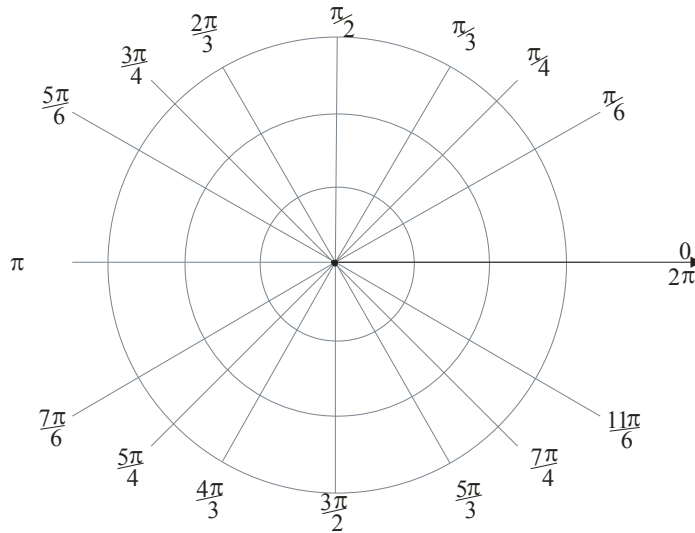


Resposta:

2. Represente no plano os pontos (ρ, θ) onde:

$$A\left(-1, -\frac{\pi}{2}\right), B(3, 3\pi), C\left(2, \frac{7\pi}{4}\right), D\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3\pi}{4}\right), E\left(-2, \frac{\pi}{6}\right), F\left(-3, \frac{31\pi}{6}\right) \text{ e } G\left(2, -\frac{5\pi}{4}\right).$$

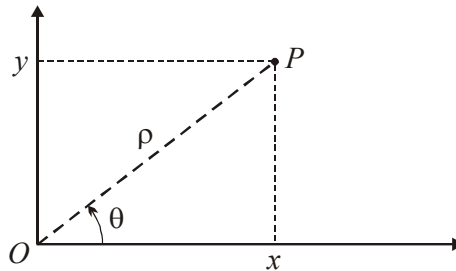
Resolução:



Resposta:

2.2.1 Relações entre Coordenadas Cartesianas e Polares

Para a representação do mesmo ponto em coordenadas cartesianas e coordenadas polares vamos tomar o ponto O como origem dos dois sistemas. Tome também o eixo polar coincidindo com o eixo “ Ox ”. Se P não coincidir com o pólo (origem), temos:



$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases} \left. \vphantom{\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}} \right\} \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

(ρ, θ) é o ponto em coordenadas polares.

(x, y) é o ponto em coordenadas cartesianas.

Definição

Uma função em coordenadas polares é uma relação que associa a cada ângulo θ (medido em radianos) um único real ρ (que pode ser negativo). Representa-se por:

$$\rho = f(\theta)$$

Existem alguns casos especiais de funções em coordenadas polares que serão tratados a seguir.

2.2.2 Caso Geral da Espiral de Arquimedes

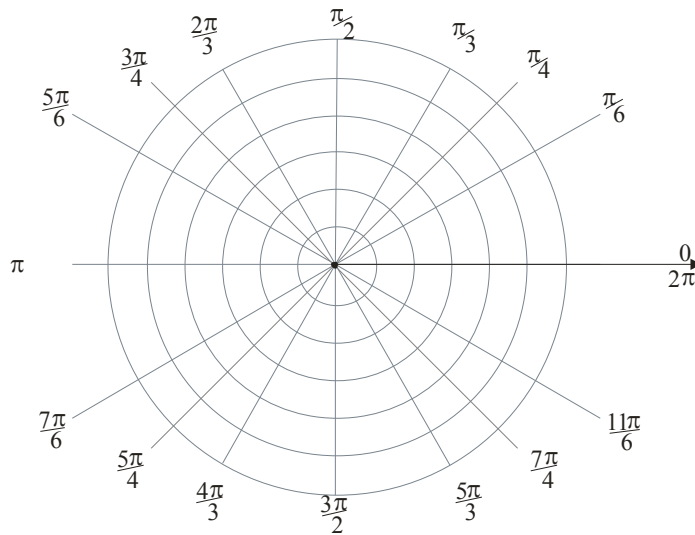
$$\rho = a \theta \quad (\forall a \neq 0; a \in \mathbb{R})$$

3. Construir o gráfico da função:

$$\rho = \theta, \text{ para } 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

| | | | | | | | | | |
|----------------|---|-----------------|-----------------|------------------|-------|------------------|------------------|------------------|--------|
| θ | 0 | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | π | $\frac{5\pi}{4}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{7\pi}{4}$ | 2π |
| ρ | 0 | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | π | $\frac{5\pi}{4}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{7\pi}{4}$ | 2π |
| $\tilde{\rho}$ | 0 | 0,8 | 1,6 | 2,1 | 3,1 | 3,9 | 4,7 | 5,5 | 6,3 |

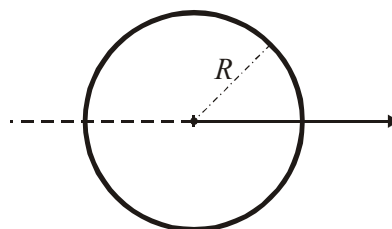
Resolução:



Resposta:

2.2.3 Constante

$\rho = R$ (constante) é um círculo de raio R .



2.2.4 Caso Geral da Cardióide

O gráfico de qualquer uma das equações polares seguintes, com $a \neq 0$, é uma CARDIÓIDE:

$$\rho = a(1 + \cos \theta)$$

$$\rho = a(1 - \cos \theta)$$

$$\rho = a(1 + \sin \theta)$$

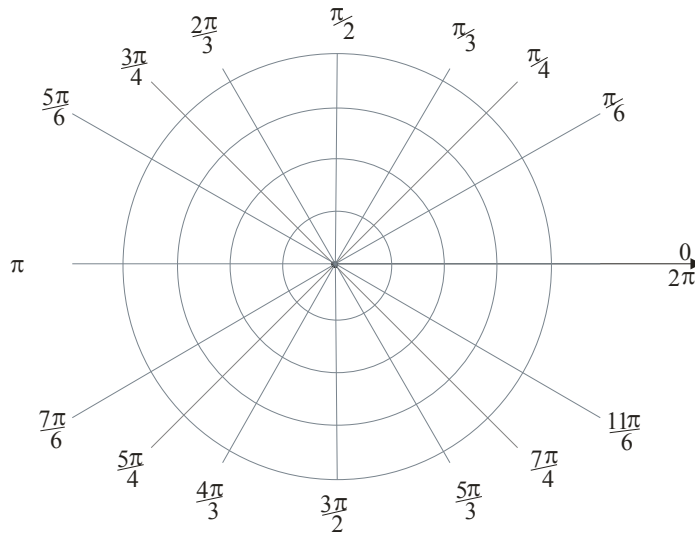
$$\rho = a(1 - \sin \theta)$$

4. Construir o gráfico da função:

$$\rho = 2 + 2 \cos \theta \text{ (cardióide).}$$

Resolução:

| | | | | | | | | | |
|----------------|---|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|------------------|------------------|------------------|-------|
| θ | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | π |
| ρ | | | | | | | | | |
| $\tilde{\rho}$ | | | | | | | | | |



Resposta:

2.2.5 Caso Geral do Caracol

Se a e b não são nulos, então os gráficos das equações polares seguintes são CARACÓIS.

$$\rho = a + b \cos \theta,$$

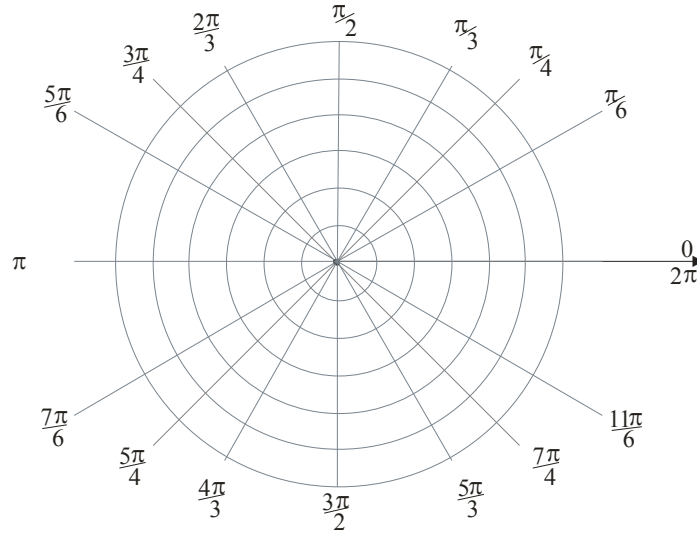
$$\rho = a + b \sin \theta.$$

5. Construir o gráfico da função:

$$\rho = 2 + 4 \cos \theta \text{ (caracol).}$$

Resolução:

| | | | | | | | | | |
|----------------|---|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|------------------|------------------|------------------|-------|
| θ | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | π |
| ρ | | | | | | | | | |
| $\tilde{\rho}$ | | | | | | | | | |



Resposta:

2.2.6 Caso Geral da Rosácea

Qualquer uma das equações abaixo representa uma rosácea, considerando as condições seguintes:

$$\forall a \neq 0; a \in \mathbb{R} \text{ e}$$

$$\forall n > 1; n \in \mathbb{N}$$

$$\rho = a \sin n\theta$$

$$\rho = a \cos n\theta$$

O gráfico consiste em um certo número de laços pela origem.

- Se n é par, há $2n$ laços;
- Se n é ímpar, há n laços.

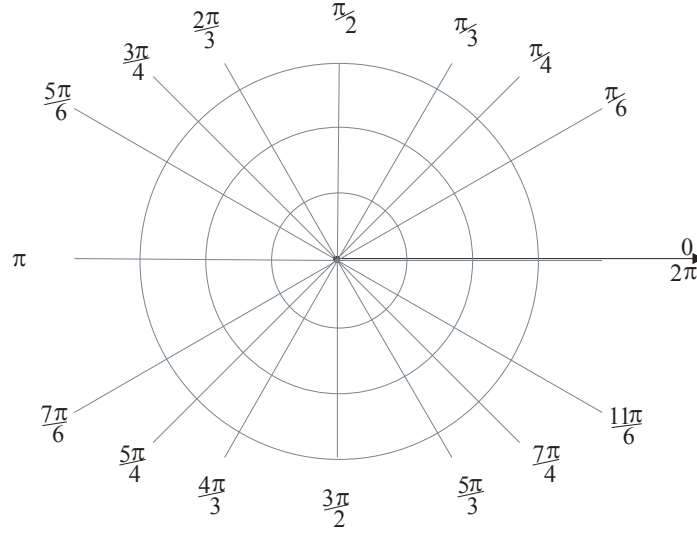
6. Construir os gráficos das rosáceas nos itens a) e b).

Rosáceas de quatro pétalas (folhas):

a) $\rho = 3 \sin 2\theta$

Resolução:

| | | | | | | | | | |
|----------------|---|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|------------------|------------------|------------------|-------|
| θ | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | π |
| $\tilde{\rho}$ | | | | | | | | | |

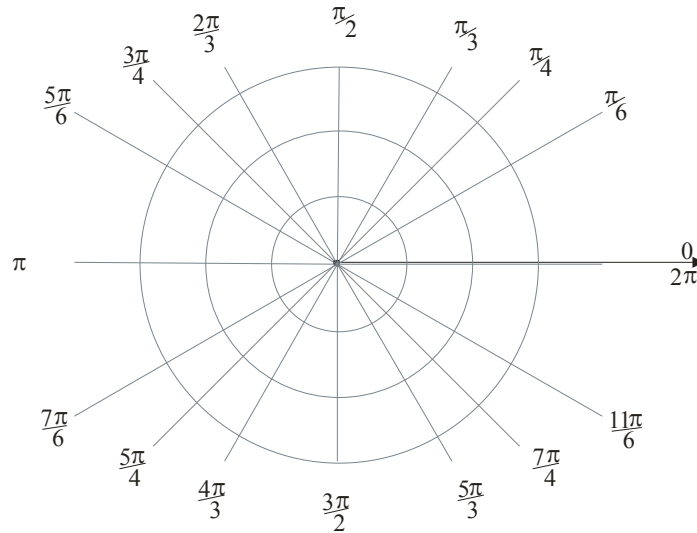


Resposta:

b) $\rho = 3 \cos 2\theta$

Resolução:

| | | | | | | | | | |
|----------------|---|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|------------------|------------------|------------------|-------|
| θ | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | π |
| $\tilde{\rho}$ | | | | | | | | | |



Resposta:

7. Se considerarmos o quadrado do primeiro termo na rosácea seguinte, temos:

$$\rho^2 = 4 \cos 2\theta \text{ (Lemniscata de Bernoulli).}$$

Dicas para fazer o gráfico:

$$\rho = 2\sqrt{\cos 2\theta} \quad 0 \leq \cos 2\theta \leq 1$$

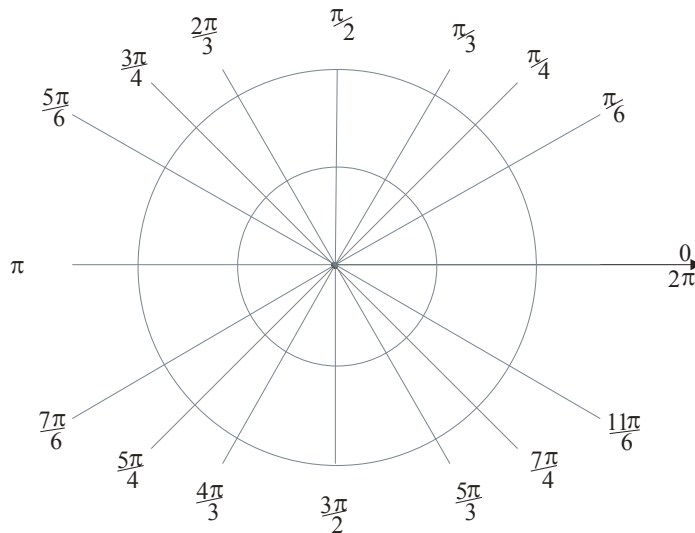
Tome $D\rho$ como o domínio de ρ tal que:

$$D\rho = \left\{ \theta \in \mathbb{R}; -\frac{\pi}{2} + 2n\pi \leq 2\theta \leq \frac{\pi}{2} + 2n\pi, \text{ com } n \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$D\rho = \left\{ \theta \in \mathbb{R}; -\frac{\pi}{4} + n\pi \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} + n\pi, \text{ com } n \in \mathbb{Z} \right\}$$

Resolução:

| | | | | | | | | | |
|----------------|---|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|------------------|------------------|------------------|-------|
| θ | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | π |
| $\tilde{\rho}$ | | | | | | | | | |

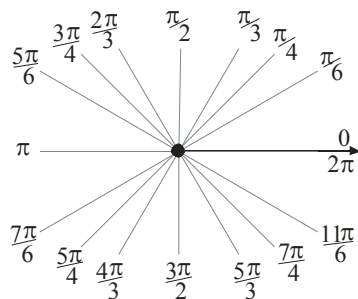


Resposta:

2.3 Gráficos diversos em coordenadas polares

2.3.1 Equação do pólo (origem)

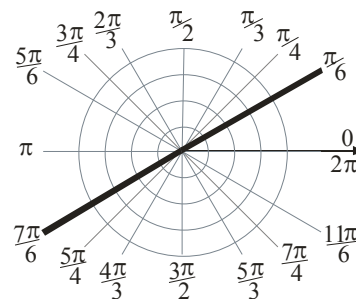
$$\rho = 0$$



2.3.2 Equação que passa pela origem

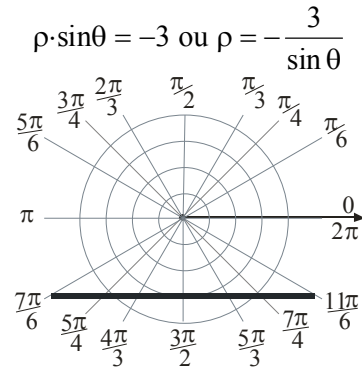
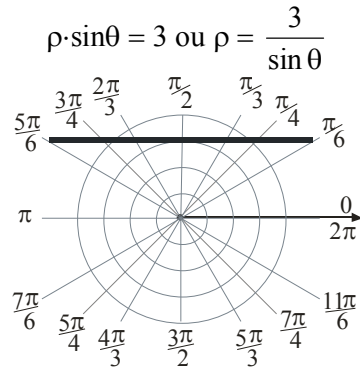
$$\theta = r \text{ (r constante)}$$

$$\theta = \frac{\pi}{6} \text{ ou } \theta = \frac{7\pi}{6}$$

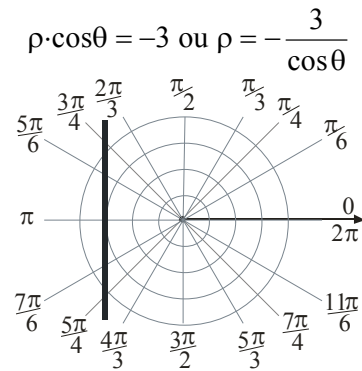
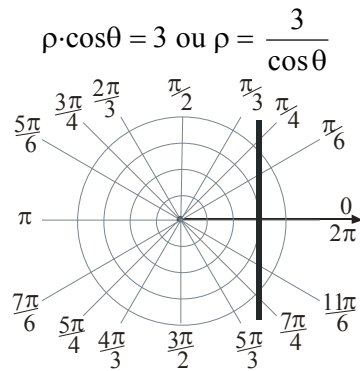


2.3.3 Retas paralelas e perpendiculares ao eixo polar

a) $\rho \cdot \sin\theta = b$

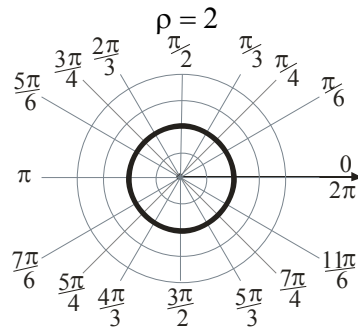


b) $\rho \cdot \cos\theta = a$

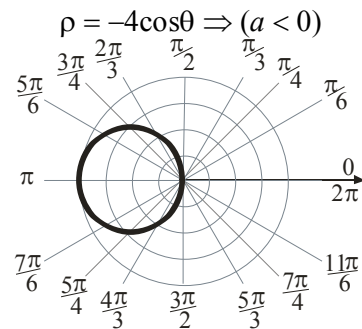
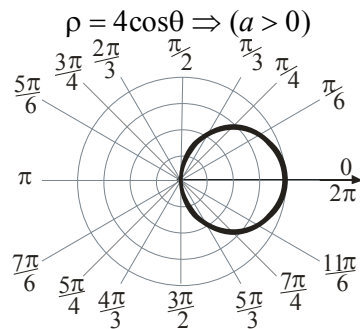


2.3.4 Algumas circunferências

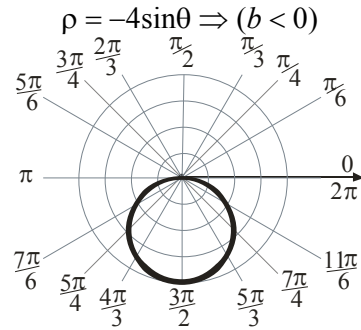
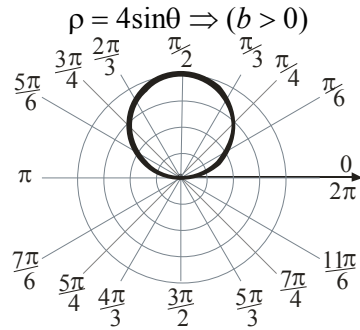
a) $\rho = r$ (constante)



b) $\rho = 2a \cdot \cos\theta$



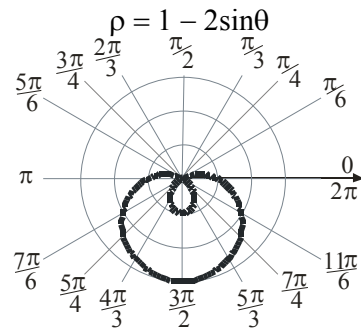
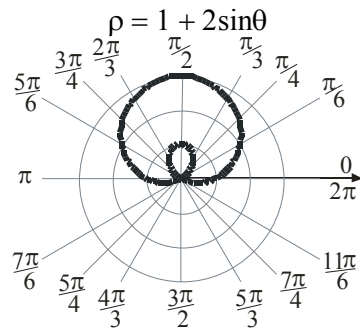
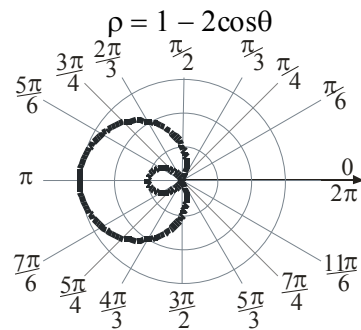
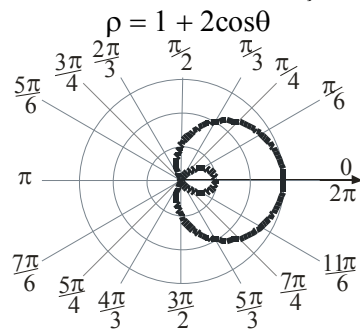
c) $\rho = 2b \cdot \sin\theta$



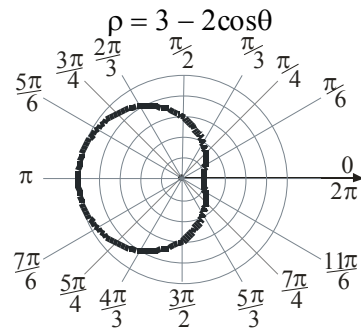
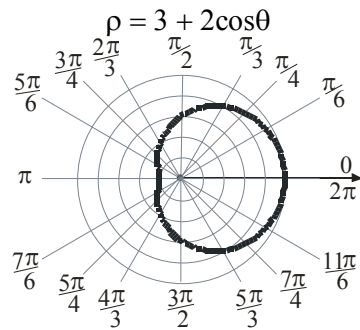
2.3.5 Limaçons

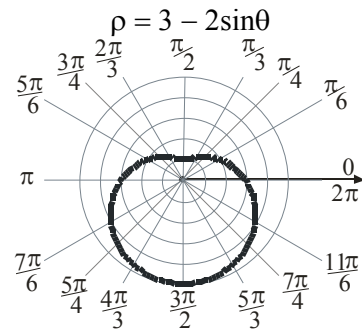
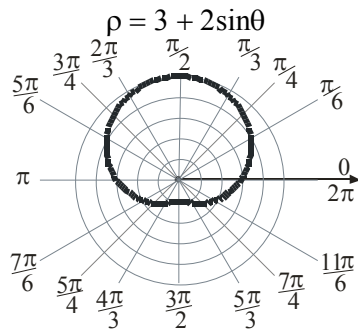
$\rho = a \pm b \cdot \cos\theta$ ou $\rho = a \pm b \cdot \sin\theta$, onde $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Se $b > a \Rightarrow$ a curva tem um laço



b) Se $b < a \Rightarrow$ a curva não tem laço

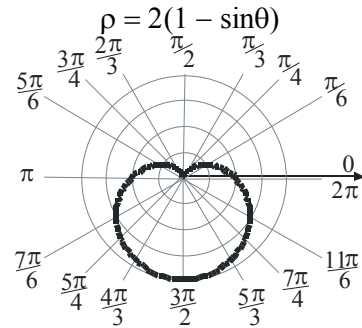
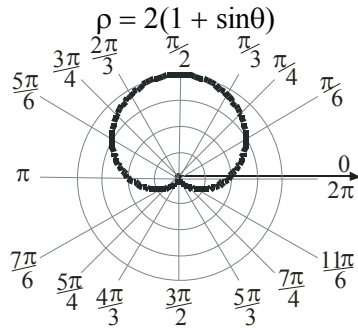
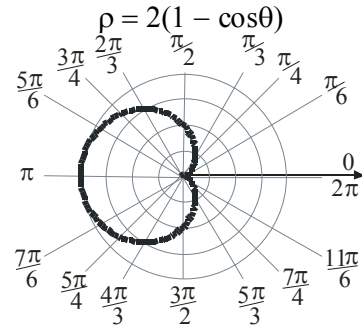
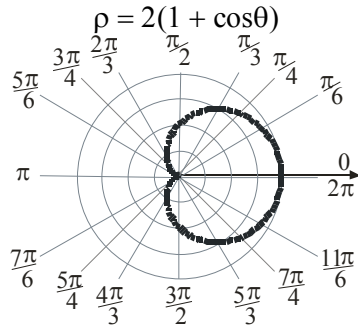




2.3.6 Cardioides

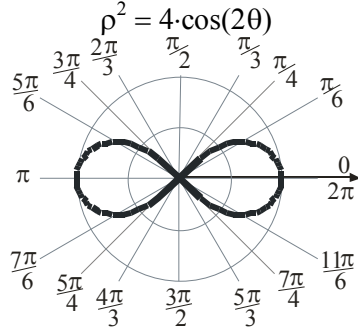
São limaçons onde $a = b$.

$\rho = a \cdot (1 \pm \cos\theta)$ ou $\rho = a \cdot (1 \pm \sin\theta)$, onde $a \in \mathbb{R}$.



2.3.7 Lemniscata de Bernoulli

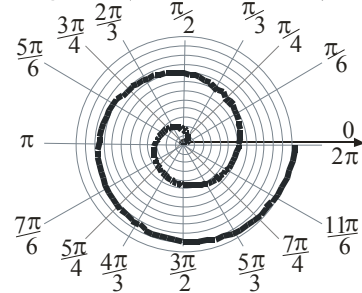
$\rho^2 = a^2 \cdot \cos(2\theta)$, onde $a \in \mathbb{R}$.



2.3.8 Espiral de Arquimedes

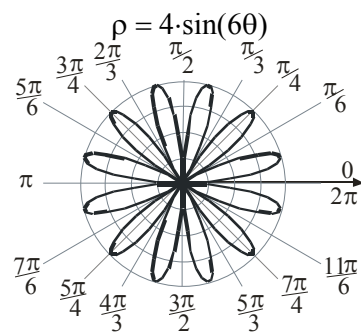
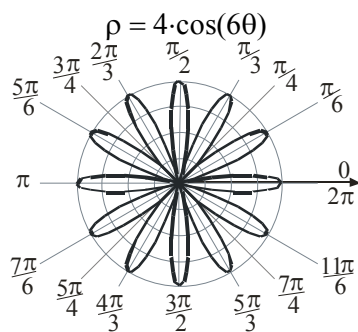
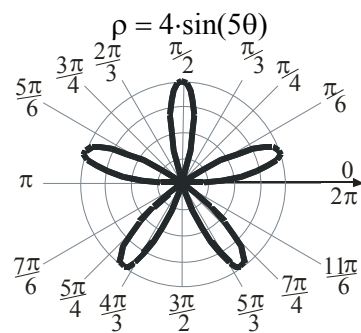
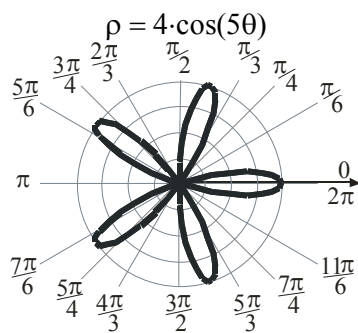
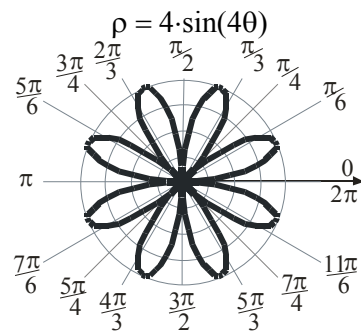
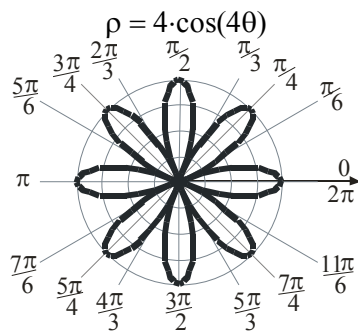
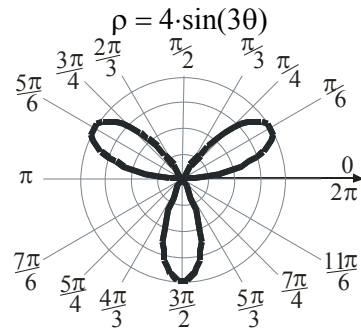
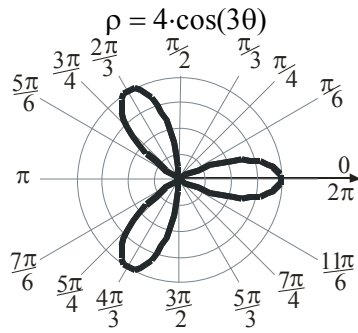
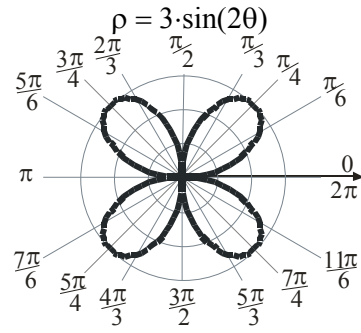
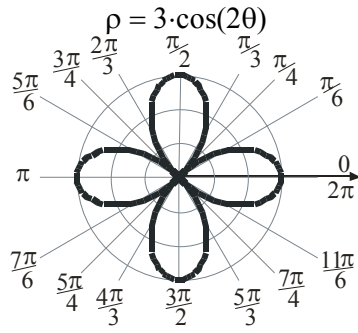
$\rho = a \cdot \theta$, onde $a > 0$.

$\rho = \theta$ (Obs: $0 \leq \theta \leq 4\pi$)



2.3.9 Rosáceas

$\rho = a \cdot \cos(n \cdot \theta)$ ou $\rho = a \cdot \sin(n \cdot \theta)$, onde $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$.

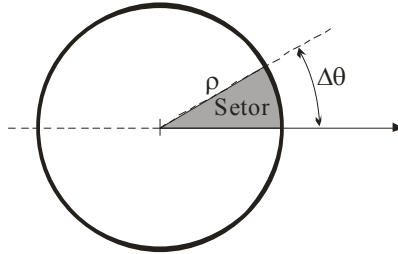


2.4 Áreas em Coordenadas Polares

Vamos iniciar determinando a área em um setor circular e depois, desenvolver para coordenadas polares.

2.4.1 Área de um Setor Circular

Área de um setor circular de raio r e abertura $\Delta\theta$ que será calculada através de uma regra de três simples:



$$\text{Área Total } (At) = \pi\rho^2$$

$$\text{Área Setor } (As) = ?$$

$$At - 2\pi$$

$$As - \Delta\theta$$

$$\pi\rho^2 - 2\pi$$

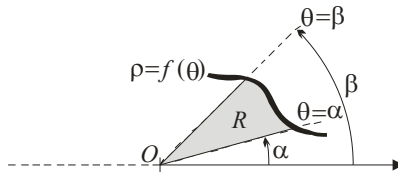
$$As - \Delta\theta$$

$$As = \frac{\pi\rho^2 \cdot \Delta\theta}{2\pi} = \frac{\rho^2 \cdot \Delta\theta}{2}$$

$$As = \frac{1}{2} \rho^2 \Delta\theta$$

2.4.2 Áreas em Coordenadas Polares (dedução)

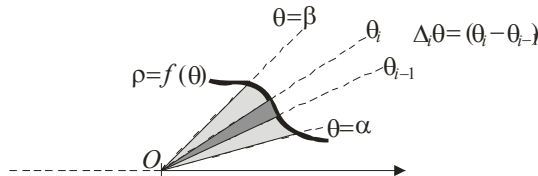
Seja f uma função contínua e não-negativa no intervalo fechado $[\alpha, \beta]$. Seja R uma região limitada pela curva cuja equação é $\rho = f(\theta)$ e pelas retas $\theta = \alpha$ e $\theta = \beta$. Então, a região R é a que está mostrada na figura seguinte.



Considere uma partição Δ de $[\alpha, \beta]$ definida por:

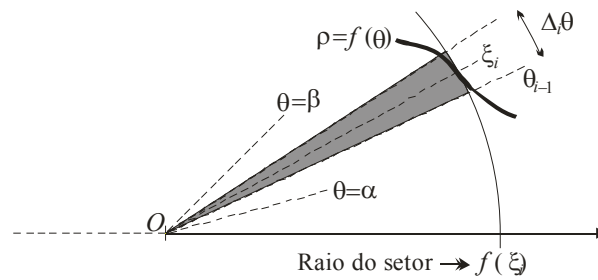
$$\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_{i-1} < \theta_i < \theta_{i+1} < \dots < \theta_{n-1} < \theta_n = \beta.$$

Desta forma, definimos n subintervalos do tipo $[\theta_{i-1}, \theta_i]$, onde $i = 1, 2, \dots, n$.



A medida em radianos do ângulo entre as retas $\theta = \theta_{i-1}$ e $\theta = \theta_i$ é denotada por $\Delta_i\theta$.

Tome ξ_i como sendo um valor de θ no i -ésimo subintervalo e considere $f(\xi_i)$ o raio do setor circular neste subintervalo, como mostra a figura seguinte.



Como foi visto anteriormente, a área do setor é dada por:

$$\frac{1}{2} [f(\xi_i)]^2 \Delta_i \theta$$

Existe um setor circular para cada um dos n subintervalos. A soma das medidas das áreas é:

$$\frac{1}{2} [f(\xi_1)]^2 \Delta_1 \theta + \frac{1}{2} [f(\xi_2)]^2 \Delta_2 \theta + \dots + \frac{1}{2} [f(\xi_i)]^2 \Delta_i \theta + \dots + \frac{1}{2} [f(\xi_n)]^2 \Delta_n \theta$$

Que pode ser escrita através da somatória:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} [f(\xi_i)]^2 \Delta_i \theta$$

Tome A como a área da região R e seja $\|\Delta\|$ a norma da partição Δ , isto é, $\|\Delta\|$ é o maior valor de $\Delta_i \theta$. Então a área é definida como:

$$A = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} [f(\xi_i)]^2 \Delta_i \theta$$

Este limite é a seguinte integral definida:

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} [f(\theta)]^2 d\theta$$

Teorema

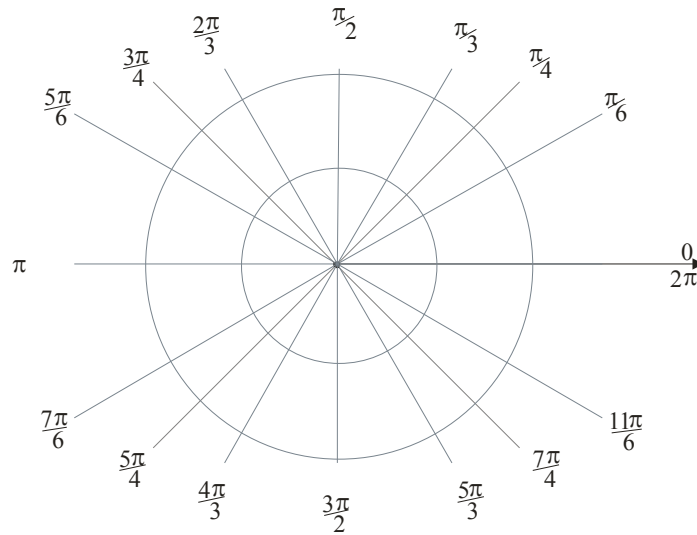
Se f é contínua e $f(\theta) \geq 0$ em $[\alpha, \beta]$, onde $0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$, então a área A da região delimitada pelos gráficos de $\rho = f(\theta)$, $\theta = \alpha$ e $\theta = \beta$ é dada por:

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)]^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2 d\theta$$

Exemplos

8. Calcule a área da região delimitada pela lemniscata de Bernoulli, de equação $\rho^2 = 4 \cos 2\theta$.

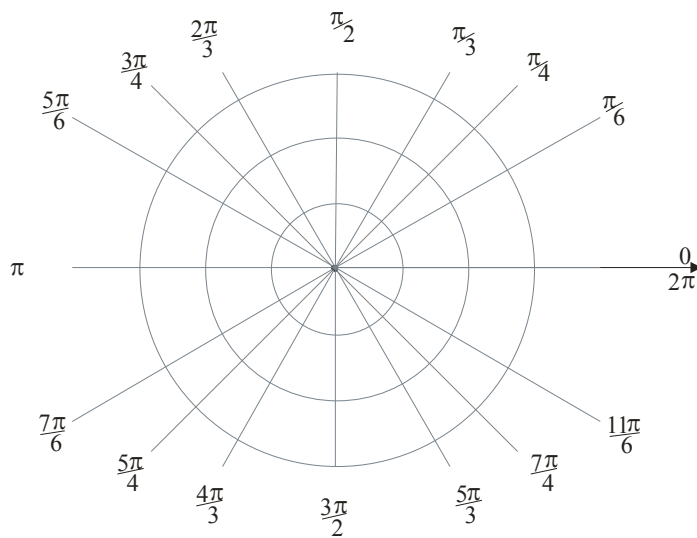
Resolução:



Resposta: $A = 4 \text{ u.a.}$

9. Calcular a área da região interna à rosácea $\rho = a \sin 2\theta$.

Resolução:

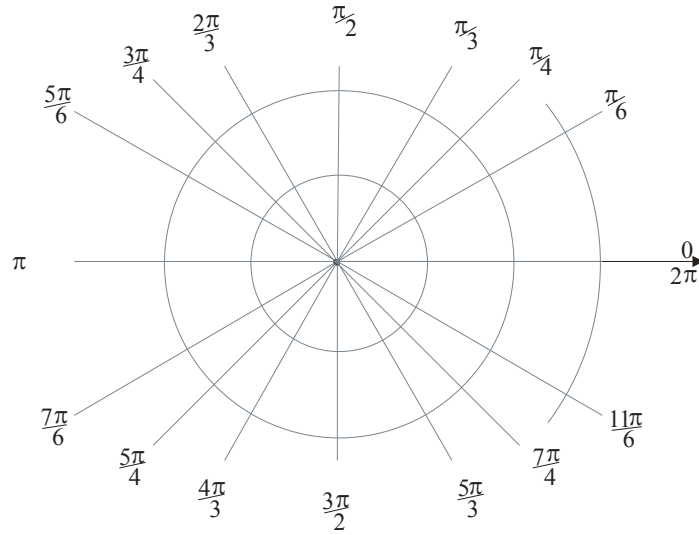


Resposta: $A = \frac{\pi a^2}{2} \text{ u.a.}$

10. Calcular a área da interseção das regiões limitadas pelas curvas $\rho=3 \cos \theta$ e $\rho=1+\cos \theta$.

Resolução:

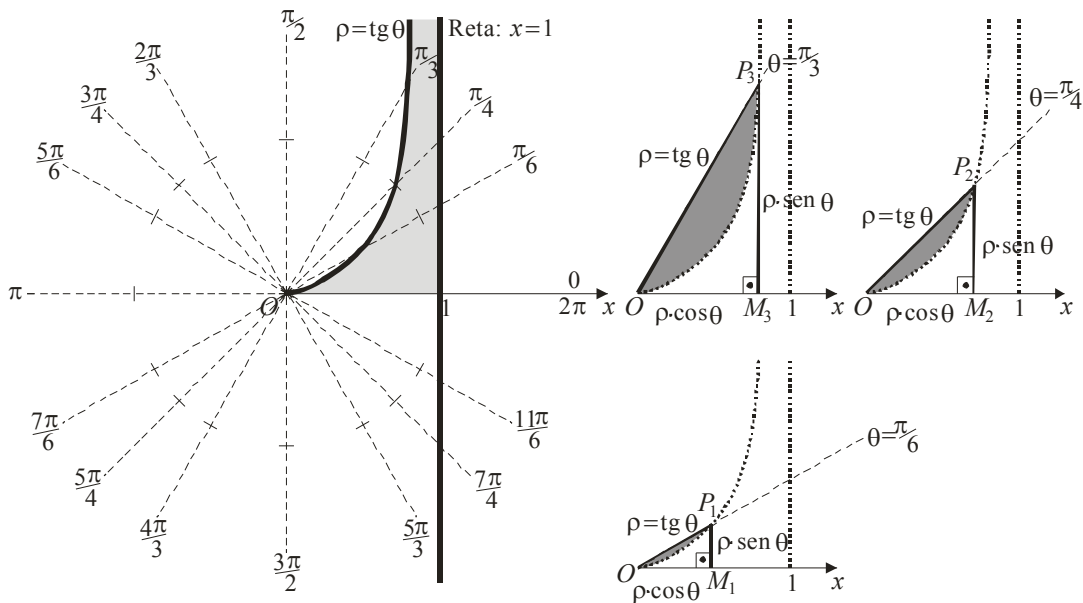
| Tipo de curva | | θ | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | π |
|----------------|-----------------|----------------|---|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|------------------|------------------|------------------|-------|
| Circunferência | $3 \cos \theta$ | $\tilde{\rho}$ | | | | | | | | | |
| Cardióide | $1+\cos \theta$ | $\tilde{\rho}$ | | | | | | | | | |



Resposta: $A = \frac{5\pi}{4} \text{ u.a.}$

11. Calcule a área da região limitada pela curva dada em coordenadas polares por $\rho = \text{tg}\theta$, com $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$, pela reta $x = 1$ (coordenadas cartesianas) e pelo eixo polar.

Dica para a resolução: Considere $A_1(\theta)$ como sendo a área da região composta pelo triângulo OMP , dado na figura abaixo.



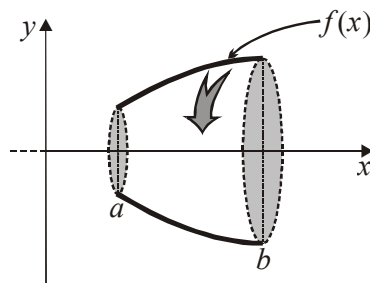
Resolução:

Resposta: $\frac{\pi}{4} u.a.$

2.5 Volume de Sólido Obtido pela Rotação de um Conjunto

Em coordenadas cartesianas já foi estudado o volume a seguir:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$



Vamos tomá-lo como base e fazer o equivalente para coordenadas polares.

2.5.1 Volume em Coordenadas Polares

O volume do sólido formado pela rotação da curva $\rho = f(\theta)$, definida no intervalo $[\alpha, \beta]$, pode ser dado através das funções paramétricas:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}, \text{ com } \alpha \leq \theta \leq \beta.$$

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_a^\beta \rho^2 \sin^2 \theta dx$$

mas,

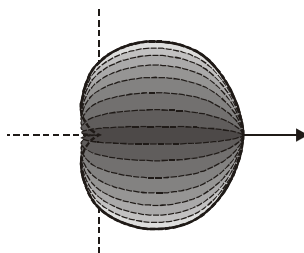
$$dx = (\rho' \cos \theta - \rho \sin \theta) d\theta$$

então:

$$V = \pi \int_a^\beta \rho^2 \sin^2 \theta (\rho' \cos \theta - \rho \sin \theta) d\theta.$$

Exemplo

12. Calcular o volume do sólido formado pela rotação em torno do eixo polar, da cardióide de equação $\rho = 2 \cdot (1 + \cos \theta)$.



Resolução:

Resposta: $V = \frac{64\pi}{3} \text{ u.v.}$

2.5.2 Fórmula do Volume Simplificada

Rotação em torno da reta cuja direção é dada por:

- $\theta = 0$ (eixo Ox):

$$V = \frac{2\pi}{3} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^3 \sin \theta d\theta.$$

- $\theta = \frac{\pi}{2}$:

$$V = \frac{2\pi}{3} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^3 \cos \theta d\theta.$$

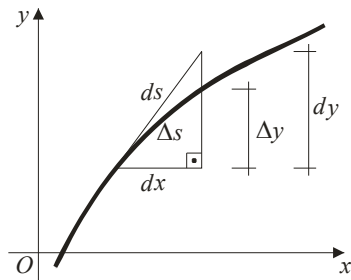
13. Refazer o exemplo anterior, $\rho = 2 \cdot (1 + \cos \theta)$.

Resolução:

Resposta: $V = \frac{64\pi}{3} \text{ u.v.}$

2.6 Diferencial do Comprimento de Arco

Como foi feito para o volume, tomaremos como base as coordenadas cartesianas para desenvolver o diferencial do comprimento de arco em coordenadas polares.



$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 \Rightarrow ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

$$\text{Em relação a } y = f(x): \Rightarrow ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \Rightarrow$$

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

$$\text{Em relação a } x = g(y): \Rightarrow ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dy}\right)^2} dy \Rightarrow$$

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy$$

Mas o que queremos desenvolver é para coordenadas polares:

$$\text{Em relação a } \rho = f(\theta): \Rightarrow ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta$$

$$\text{Mas } \begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}, \text{ então:}$$

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{d\rho}{d\theta} \cos \theta - \rho \sin \theta \text{ e } \frac{dy}{d\theta} = \frac{d\rho}{d\theta} \sin \theta + \rho \cos \theta$$

$$\text{I} \Rightarrow \left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 = \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 \cos^2 \theta - 2 \frac{d\rho}{d\theta} \cos \theta \cdot \rho \sin \theta + \rho^2 \sin^2 \theta$$

$$\text{II} \Rightarrow \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 \sin^2 \theta + 2 \frac{d\rho}{d\theta} \sin \theta \cdot \rho \cos \theta + \rho^2 \cos^2 \theta$$

Somando I com II:

$$\text{I+II} \Rightarrow \left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 + \rho^2 \quad \text{já que } \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1.$$

Logo:

$$ds = \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2} d\theta \text{ ou } ds = \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\theta$$

Com este desenvolvimento, podemos calcular o comprimento de um arco e também a área da superfície de sólidos de revolução, tomando como base os estudos em coordenadas cartesianas, adaptando para coordenadas polares.

2.6.1 Comprimento de Arco

Se $\frac{d\rho}{d\theta}$ for contínua em $[\alpha, \beta]$, então o comprimento da curva $\rho = f(\theta)$, com $\alpha \leq \theta \leq \beta$, é dado por:

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} ds = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\theta$$

Como uma variação do comprimento de arco, vamos definir também a função comprimento de arco em coordenadas polares.

Definição

Tome a função $\rho = f(\theta)$, com $\alpha \leq \theta \leq \beta$ e seja $s(\theta)$ a distância ao longo da curva $f(\theta)$ do ponto inicial $P_0(\alpha, f(\alpha))$ ao ponto $P(\theta, f(\theta))$. Então s é uma função, chamada função comprimento de arco e é dada por:

$$s(\theta) = \int_{\alpha}^{\theta} \sqrt{\rho^2 + [f'(t)]^2} dt$$

A mudança da variável de integração para t tem como objetivo não dar dois significados para a variável θ .

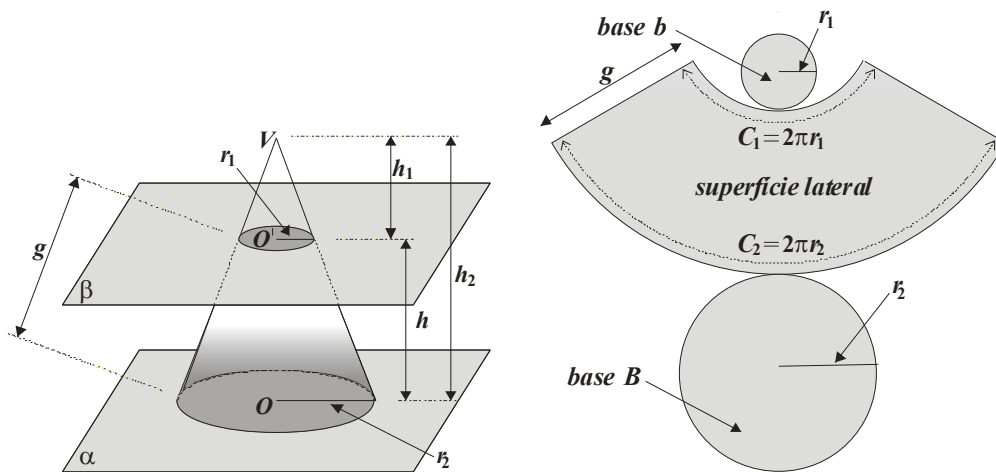
2.7 Área da Superfície de Sólidos de Revolução

Uma superfície de revolução é formada quando uma curva é girada ao redor de uma reta. Tal superfície é a fronteira lateral de um sólido de revolução.

Queremos definir a área da superfície de revolução de tal maneira que ela corresponda a nossa intuição. Podemos pensar em descascar uma camada externa muito fina do sólido de revolução e torna-la plana de modo que possamos medir sua área. Ou, se a área da superfície for A , podemos pensar que para pintar a superfície seria necessário a mesma quantidade de tinta que para pintar uma região plana com área A .

2.7.1 Dedução da Fórmula Cartesiana

Vamos tomar como superfície aproximadora do sólido de revolução, *faixas*. Cada qual formada pela rotação de um segmento de reta ao redor de um eixo. Para encontrar a área da superfície cada uma dessas faixas pode ser considerada como uma porção de um cone circular (tronco de cone regular), como mostra a figura seguinte, com geratriz g e raios superior e inferior r_1 e r_2 respectivamente, é calculada pela subtração das áreas laterais dos dois cones:



A área lateral do tronco de cone (A_l) é igual à área do trapézio de altura g , base menor $C_1=2\pi r_1$ e base maior $C_2=2\pi r_2$.

$$A_l = \frac{g}{2} (C_1 + C_2) \Rightarrow A_l = \frac{g}{2} (2\pi r_1 + 2\pi r_2) \Rightarrow A_l = \pi g (r_1 + r_2)$$

Sendo r o raio médio da faixa (tronco de cone), temos: $r = \frac{r_1 + r_2}{2} \Rightarrow 2r = r_1 + r_2$

$$A_l = \pi g \cdot (r_1 + r_2) \Rightarrow A_l = \pi g \cdot (2r)$$

Logo:

$$A_l = 2\pi r g$$

Estendendo o conceito de área para superfície obtida pela rotação, em torno do eixo x , do gráfico de uma função f , com derivada contínua e $f(x) \geq 0$ em $[a, b]$.

Vamos considerar uma partição Δ de $[a, b]$ definida por:

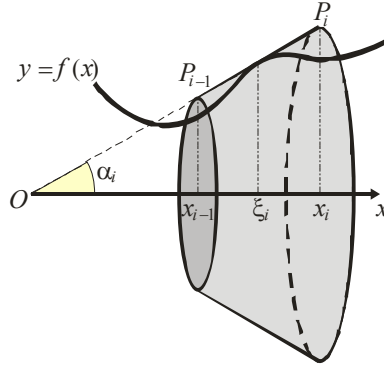
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{i-1} < x_i < x_{i+1} < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Desta forma, definimos n subintervalos do tipo $[x_{i-1}, x_i]$, onde $i = 1, 2, \dots, n$ com larguras Δx_i . Tome ξ_i como sendo o valor médio de x no i -ésimo subintervalo, ou seja, $\xi_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$. O segmento de reta $\overline{P_{i-1}P_i}$ é tangente ao gráfico de f no ponto $(\xi_i, f(\xi_i))$, sendo $f'(\xi_i) = \tan \alpha_i$.

Ao girar $\overline{P_{i-1}P_i}$ ao redor do eixo x , o resultado é uma faixa (um tronco de cone) com geratriz $g = \overline{P_{i-1}P_i}$ e raio médio $f(\xi_i)$. Desta forma, a área da superfície é dada por:

$$A_l = 2\pi r g \Rightarrow A_l(\xi_i) = 2\pi f(\xi_i) \overline{P_{i-1}P_i}$$

sendo $A_l(\xi_i)$ a área lateral do tronco de cone, raio médio $f(\xi_i)$ no subintervalo Δx_i .



Então

$$\overline{P_{i-1}P_i} = \frac{\Delta x_i}{|\cos \alpha_i|} = |\sec \alpha_i| \Delta x_i = \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \Delta x_i$$

Substituindo $\overline{P_{i-1}P_i}$ na área do tronco de cone, temos:

$$A_l(\xi_i) = 2\pi f(\xi_i) \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \Delta x_i$$

Se Δx_i for suficientemente pequeno, esta área será uma boa aproximação para a área da superfície gerada pela rotação da parte da função limitada entre as retas $x = x_{i-1}$ e $x = x_i$.

Desta forma podemos tomar como aproximação completa da área da superfície de revolução o somatório seguinte:

$$\sum_{i=1}^n A_l(\xi_i)$$

Reconhecendo que a somatória anterior é uma soma de Riemann para a função $A_l(\xi_i)$, contínua em $[a, b]$, tome $\Delta x = \max \Delta x_i$ e teremos:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n A_l(\xi_i) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n 2\pi f(\xi_i) \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \Delta x_i = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Assim, definimos a área S da superfície obtida pela rotação do gráfico de f em torno do eixo x por:

$$S = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

Se a curva é descrita como $x = g(y)$, com $y \in [c, d]$, temos a fórmula equivalente:

$$S = 2\pi \int_a^b x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy$$

Considerando o diferencial do comprimento de arco (ds), dado anteriormente, temos:

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \text{ ou } ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy$$

Daí, temos a rotação em torno dos eixos:

- Eixo x :

$$S = 2\pi \int_a^b y ds$$

- Eixo y :

$$S = 2\pi \int_a^b x ds$$

2.7.2 Área da Superfície de Sólidos de Revolução na Forma Polar

Tome a função $\rho = f(\theta)$, em coordenadas polares, com $\alpha \leq \theta \leq \beta$, de tal forma que $\frac{d\rho}{d\theta}$ seja contínua em $[\alpha, \beta]$.

Para as coordenadas polares, faremos as adaptações feitas anteriormente.

Temos que: $\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$ e $ds = \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2} d\theta$ ou $ds = \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\theta$.

Então:

Rotação em torno da reta cuja direção é dada por:

- $\theta = 0$ (eixo polar)

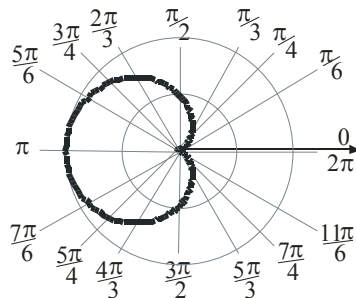
$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} y ds = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \rho \sin \theta \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\theta$$

- $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} x ds = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \rho \cos \theta \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\theta$$

Exemplos

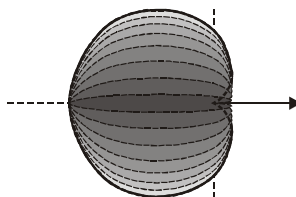
14. Achar o comprimento total da cardióide de equação $\rho = 1 - \cos \theta$.



Resolução:

Resposta: $L = 8 \text{ u.c.}$

15. Considerando a mesma equação $\rho = 1 - \cos\theta$, calcular a área da superfície formada pela rotação em torno do eixo polar.

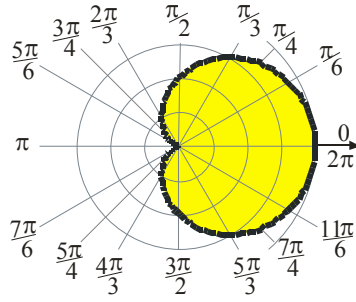


Resolução:

Resposta: $S = \frac{32\pi}{5} \text{ u.a.}$

2.8 Exercícios

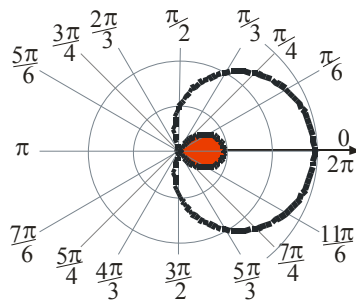
16. Encontre a área da região no plano limitada pela cardióide $r = 2(1 + \cos\theta)$.



Resolução:

Resposta: $A = 6\pi \text{ u.a.}$

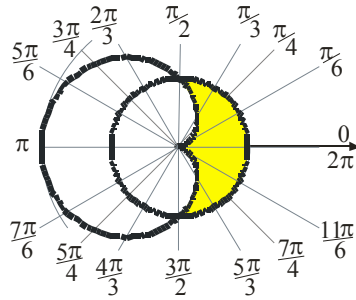
17. Encontre a área dentro do laço menor do caracol $r = 2 \cos \theta + 1$.



Resolução:

Resposta: $A = \left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) u.a.$

18. Encontre a área da região que está dentro do círculo $r = 1$ e fora da cardióide $r = 1 - \cos\theta$.



Resolução:

Resposta: $A = \left(2 - \frac{\pi}{4}\right) u.a.$

3 Integrais Eulerianas

3.1 Leonhard Euler



Matemático suíço, que viveu entre 1707 e 1783. Euler apresentou uma valiosa contribuição para o uso da geometria das coordenadas no espaço tridimensional. Este apresentou equações gerais para três classes de superfícies (cilindros, cones, superfícies de revolução). Euler escreveu duas notas sobre o sistema de coordenadas polares tão perfeitas e sistemáticas que por vezes dá-se o nome de “sistema Euler”.

Ao nos referirmos a Leonhard Euler estamos falando do escritor de matemática mais produtivo de todos os tempos. Com 886 trabalhos publicados, a maioria deles no final de sua vida, quando já estava completamente cego, Euler foi tão importante não apenas para a matemática, mas também a física, engenharia e astronomia. Para se ter uma idéia, a Academia de Ciências de São Petersburgo continuou a publicar trabalhos novos de Euler por mais de 30 anos depois da sua morte.

Entre suas contribuições mais conhecidas na matemática moderna estão: a introdução da função gama, a relação entre o cálculo diferencial de Leibniz e o método das fluxões de Newton e a resolução de equações diferenciais com a utilização do fator integrante.

Euler foi o primeiro a tratar seno e cosseno como funções. Devemos a ele as notações $f(x)$ para uma função, e para a base do logaritmo natural, i para a raiz quadrada de -1 , Σ para a somatória, $d^n y$ para derivadas de graus elevados, entre muitas outras.

Um acontecimento interessante: Euler foi um cristão por toda a sua vida e frequentemente lia a Bíblia a sua família. Uma história sobre sua religião durante sua estada na Rússia envolve o dito filósofo ateu Diderot. Diderot foi convidado à corte por Catarina, mas tornou-se inconveniente ao tentar converter todos ao ateísmo. Catarina pediu a Euler que ajudasse, e Euler disse a Diderot, que era ignorante em matemática, que lhe daria uma prova matemática da existência de Deus, se ele quisesse ouvir. Diderot disse que sim, e, conforme conta De Morgan, Euler se aproximou de Diderot e disse, sério, em um tom de perfeita convicção: “ $\frac{a+bn}{n} = x$, portanto, Deus existe”. Diderot ficou sem resposta, e a corte caiu na gargalhada. Diderot voltou imediatamente à França.

3.2 Função Gama (Γ)

Definida pelo matemático Leonard Euler, a função gama representada por $\Gamma(n)$, é definida por:

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$$

$\Gamma(n)$ é uma função convergente quando $n > 0$.

Demonstração: Coleção Schaum (18: pág. 354)

Para $n=1$:

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} x^{1-1} e^{-x} dx = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{e^x} \right]_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{e^b} \right) = 1$$

3.2.1 Fórmula de Recorrência

$$\Gamma(n+1) = n \Gamma(n)$$

Esta expressão pode determinar $\Gamma(n)$ para todo $n > 0$. Em particular, se n é um número inteiro positivo, então:

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n! \quad (n=1, 2, 3, \dots).$$

A função gama generaliza a função fatorial.

Desenvolvimento

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} x^{n+1-1} e^{-x} dx = \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx \quad \text{Integração por partes: } \int u dv = uv - \int v du .$$

$$u = x^n \Rightarrow du = nx^{n-1} dx$$

$$dv = e^{-x} dx \Rightarrow v = -e^{-x} .$$

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b x^n e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b u dv = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[uv \right]_0^b - \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b v du$$

$$\Gamma(n+1) = \lim_{b \rightarrow \infty} \underbrace{\left[-\frac{x^n}{e^x} \right]_0^b}_{\rightarrow 0} + \lim_{b \rightarrow \infty} n \int_0^b x^{n-1} e^{-x} dx$$

$$\Gamma(n+1) = n \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx = n\Gamma(n)$$

Então, por recorrência:

$$\Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1 \cdot 1 = 1!$$

$$\Gamma(3) = 2 \cdot \Gamma(2) = 2 \cdot 1 = 2!$$

$$\Gamma(4) = 3 \cdot \Gamma(3) = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$$

⋮

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Logo:

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!$$

3.2.2 Função Gama para $0 < n < 1$

Para $0 < n < 1$, obtém-se a relação dos complementos dada por:

$$\Gamma(n) \cdot \Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\sin n\pi}$$

$$n = \frac{1}{2} \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{2}} = \pi$$

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = \pi \Rightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Então:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2} - 1\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Exercício

1. Com base no que já foi dado, determine os valores de: $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$, $\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)$ e $\Gamma\left(\frac{13}{2}\right)$.

Resolução:

$$\text{Resposta: } \frac{3\sqrt{\pi}}{4}, \frac{15\sqrt{\pi}}{8} \text{ e } \frac{10395\sqrt{\pi}}{64}$$

3.2.3 Função Gama para $n < 0$

Da relação de recorrência $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$, que toma $\Gamma(n)$ como definição para $n > 0$, podemos generalizar a função gama para $n < 0$, isolando $\Gamma(n)$:

$$\Gamma(n) = \frac{\Gamma(n+1)}{n}$$

Então:

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2} + 1\right)}{-\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\left(-\frac{1}{2}\right)} = -2\sqrt{\pi}$$

Exercício

2. Determine os valores de: $\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)$, $\Gamma\left(-\frac{5}{2}\right)$ e $\Gamma\left(-\frac{13}{2}\right)$.

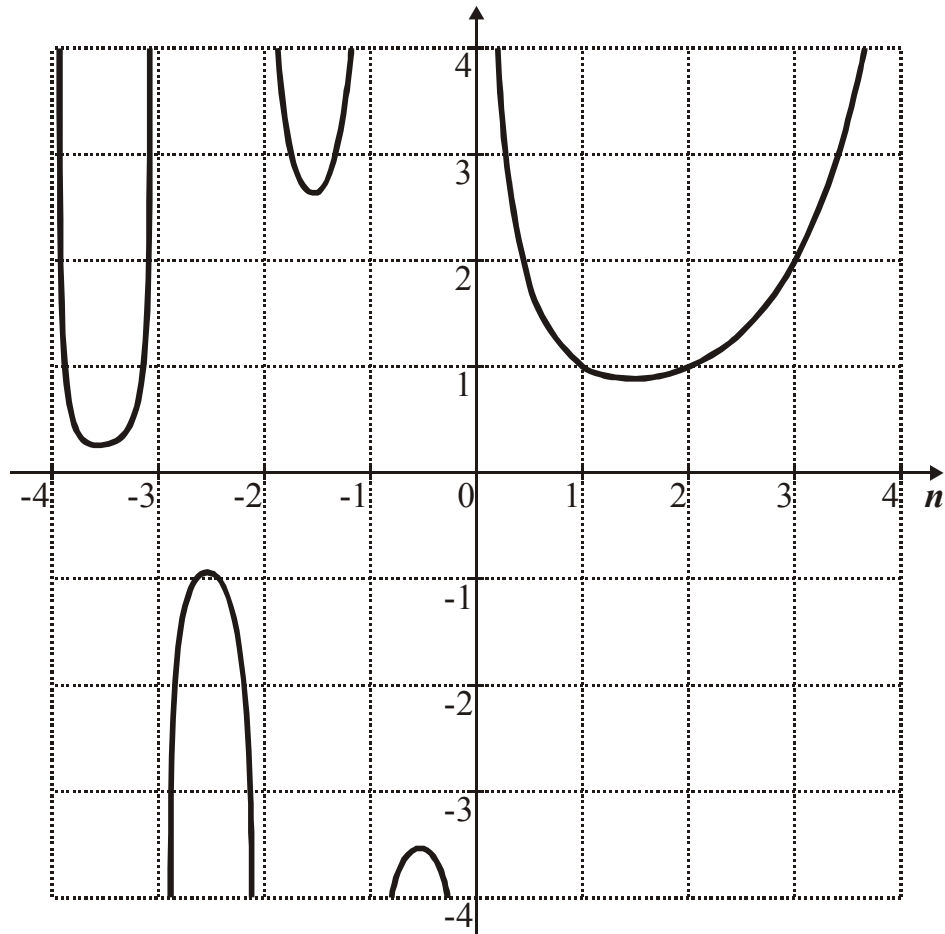
Resolução:

Resposta: $\frac{4\sqrt{\pi}}{3}$, $-\frac{8\sqrt{\pi}}{15}$ e $-\frac{128\sqrt{\pi}}{135135}$

3.2.4 Gráfico da Função Gama

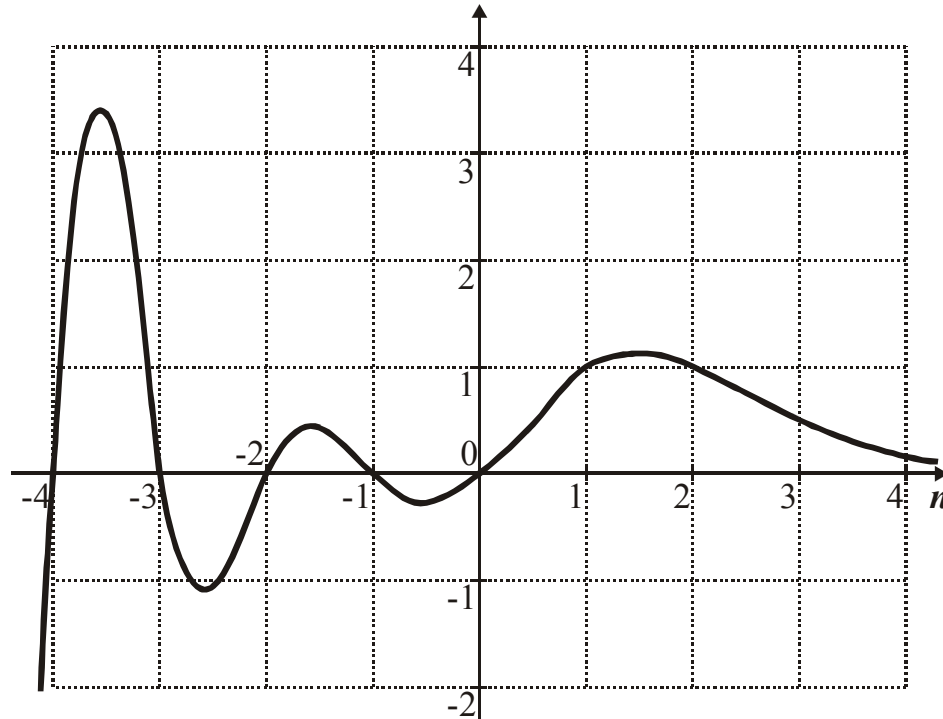
$f(n) = \Gamma(n)$

$D(f) = \mathbb{R} - \{0, -1, -2, \dots\}$



Observação

A função $\frac{1}{\Gamma(n)}$ está definida para todo $n \in \mathfrak{R}$ e se anula nos pontos $0, -1, -2, \dots$, pois $\Gamma(n)$ é infinita. Em outras palavras, a singularidade que a função teria nos pontos pode ser removida pondo o valor da função como sendo 0. $f(n) = \frac{1}{\Gamma(n)}$.



3.3 Função Beta (β)

Gabriele Veneziano (Florença, 7 de Setembro de 1942) é um físico teórico italiano. Era pesquisador do CERN no ano de 1968, onde estudava certas propriedades da força nuclear forte. Até então viera trabalhando nesse problema quando descobriu que a função beta de Euler servia para descrever muitas propriedades das partículas sob a influência da força nuclear forte. Entretanto, a explicação por que a função beta servia tão bem só foi descoberta dois anos depois, em 1970, pelos trabalhos de Leonard Susskind, da Universidade de Stanford, de Holger Nielsen, do Instituto Niels Bohr, e de Yochiro Nambu, da Universidade de Chicago, dando uma explicação em função da hipótese que veio a ser a origem da teoria das cordas.

Definição

$$\beta(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx$$

$\beta(m, n)$ é uma função convergente quando $m > 0$ e $n > 0$.

3. Determine os valores da função Beta para m e n dados a seguir:

a) $m = 1$ e $n = 1$;

b) $m = 2$ e $n = 1$;

c) $m = 1$ e $n = 2$.

Resolução:

Resposta: a) 1; b) $\frac{1}{2}$; c) $\frac{1}{2}$.

3.3.1 Definições Decorrentes

- Propriedade Comutativa

$$\beta(m, n) = \beta(n, m)$$

- Cálculo Direto

$$\beta(m, n) = \frac{(n-1)!}{\prod_{i=0}^{n-1} (m+i)}$$

- Função Beta em relação à função Gama

$$\beta(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

- Relação dos Complementos: se $m + n = 1$, com $0 < n < 1 \Rightarrow m = 1 - n$, então

$$\beta(m, n) = \beta(1 - n, n) = \frac{\Gamma(1-n)\Gamma(n)}{\Gamma(1-n+n)} = \Gamma(1-n)\Gamma(n) = \frac{\pi}{\sin n\pi}$$

Exemplos

Resolva as seguintes funções Beta:

4. $\beta(3,5)$

Resolução:

Resposta: $\frac{1}{105}$

5. $\beta(3,5)$

Resolução:

Resposta: $\frac{1}{105}$

6. $\beta(6,3)$

Resolução:

Resposta: $\frac{1}{168}$

7. $\beta(6,3)$

Resolução:

Resposta: $\frac{1}{168}$

3.4 Exercícios

Utilizando função Gama e função Beta, resolva as seguintes integrais:

8. $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$

Resolução:

Resposta: $\frac{1}{2} \sqrt{\pi}$

9. $\int_0^{\infty} x^6 e^{-2x} dx$

Resolução:

Resposta: $\frac{45}{8}$

10. $\int_0^1 x^2 \ln x dx$

Resolução:

Resposta: $-\frac{1}{9}$

11. $\int_0^1 x \ln x dx$

Resolução:

Resposta: $-\frac{1}{4}$

12. $\int_0^1 x^4 (1-x)^3 dx$

Resolução:

Resposta: $\frac{1}{280}$

13. Prove que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{2m-1} (\cos x)^{2n-1} dx = \frac{1}{2} \beta(m, n)$

Resolução:

Resposta:

14. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x \cos^3 x dx$

Resolução:

Resposta: $\frac{1}{24}$

15. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x dx$

Resolução:

Resposta: $\frac{5\pi}{32}$

16. Prove que $\int_0^{\infty} \frac{x^m}{(1+x^p)^n} dx = \frac{1}{p} \beta\left(\frac{m+1}{p}, n - \frac{m+1}{p}\right)$

Resolução:

Resposta:

17. Prove que $\int_0^a x^m (a-x)^n dx = a^{m+n+1} \beta(m+1, n+1)$

Resolução:

Resposta:

18. Prove que $\int_a^b (x-a)^m (b-x)^n dx = (b-a)^{m+n+1} \beta(m+1, n+1)$

Resolução:

Resposta:

19. Prove que $\int_0^1 x^m (1-x^p)^n dx = \frac{1}{p} \beta\left(\frac{m+1}{p}, n+1\right)$

Resolução:

Resposta:

20. Prove que $\int_0^1 x^m (\ln x)^n dx = \frac{(-1)^n}{(m+1)^{n+1}} \cdot \Gamma(n+1)$

Resolução:

Resposta:

21. Prove que $\int_0^{\infty} x^m e^{-(ax)^n} dx = \frac{1}{na^{m+1}} \cdot \Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)$

Resolução:

Resposta:

22. $\int_0^{\infty} \sqrt{\frac{x}{e^{3x}}} dx$

Resolução:

Resposta: $\frac{\sqrt{6\pi}}{9}$

23. $\int_0^{\infty} \sqrt[4]{x} \cdot e^{-\sqrt{x}} dx$

Resolução:

Resposta: $\frac{3\sqrt{\pi}}{2}$

24. $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt[4]{x^3}}{(1+\sqrt{x})^4} dx$

Resolução:

Resposta: $\frac{5\pi}{8}$

$$25. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos^4 x dx$$

Resolução:

Resposta: $\frac{3\pi}{256}$

$$26. \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(3-x)}}$$

Resolução:

Resposta: π

4 Tópicos de Topologia dos Espaços Reais n-Dimensionais

4.1 O Espaço Vetorial \mathfrak{R}^n

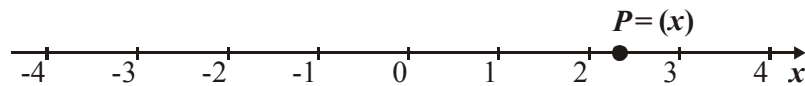
Seja n um número natural. O espaço euclidiano n -dimensional é o produto cartesiano de n fatores iguais a \mathfrak{R} :

$$\mathfrak{R}^n = \mathfrak{R} \times \mathfrak{R} \times \mathfrak{R} \times \dots \times \mathfrak{R}.$$

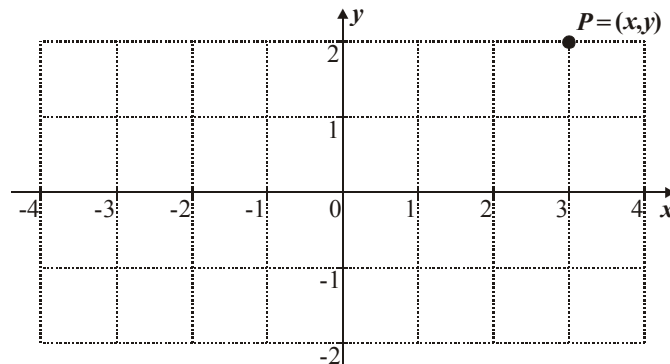
Os pontos de \mathfrak{R}^n são todas as n -listas $X = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ cujas coordenadas $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ são números reais.

Exemplos

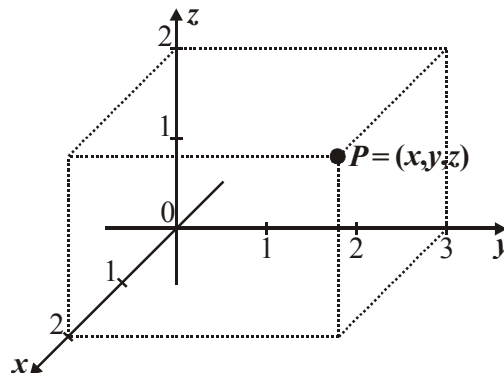
1. $\mathfrak{R}^0 = \{0\}$, espaço de dimensão zero, formado pelo único ponto 0.
2. $\mathfrak{R}^1 = \mathfrak{R}$ (reta).



3. $\mathfrak{R}^2 = \mathfrak{R} \times \mathfrak{R}$ (plano).



4. $\mathfrak{R}^3 = \mathfrak{R} \times \mathfrak{R} \times \mathfrak{R}$ (espaço tridimensional).



Definição

Dados $X = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ e $Y = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$ em \mathbb{R}^n e um número real α , define-se a soma $X + Y$ e o produto $\alpha \cdot X$ por:

$$X + Y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \dots, x_n + y_n)$$

$$\alpha \cdot X = (\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot x_2, \alpha \cdot x_3, \dots, \alpha \cdot x_n)$$

4.2 Produto Interno em \mathbb{R}^n

É uma regra que faz corresponder a cada par de vetores $x, y \in \mathbb{R}^n$ um número real, indicado por $\langle x, y \rangle$, tal que, $\forall x, x', y \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, se tenham:

- PI.1 $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$;
- PI.2 $\langle x + x', y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle$;
- PI.3 $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \cdot \langle x, y \rangle = \langle x, \alpha \cdot y \rangle$;
- PI.4 $x \neq 0 \Rightarrow \langle x, x \rangle > 0$.

Então, tendo $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$,

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + \dots + x_n y_n.$$

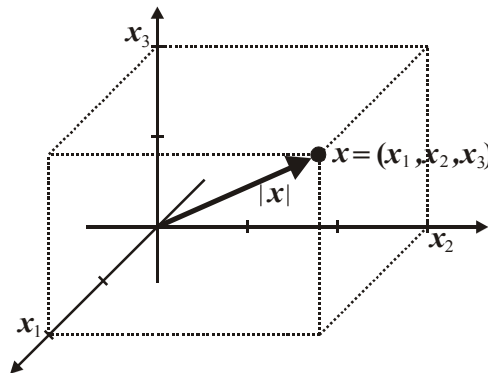
4.3 Norma de $x \in \mathbb{R}^n$ ou Comprimento do Vetor $x \in \mathbb{R}^n$

$$|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \text{ ou } |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2}$$

$|x|$ é a representação de norma de $x \in \mathbb{R}^n$.

Exemplo

5. Em \mathbb{R}^3 , $x = (x_1, x_2, x_3)$ e $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.



4.3.1 Propriedades da Norma Euclideana ($|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$)

Tome $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $|\alpha|$ como valor absoluto de α .

- N1 $|x + y| \leq |x| + |y|$;
- N2 $|\alpha \cdot x| = |\alpha| \cdot |x|$;
- N3 $x \neq 0 \Rightarrow |x| > 0$.

Existem várias normas que se podem considerar no espaço euclidiano \mathfrak{R}^n . Para $x \in \mathfrak{R}^n$, tem-se:

$$|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \quad (\text{Norma Euclidiana})$$

$$|x|_M = \text{Máx}\{|x_1|, |x_2|, |x_3|, \dots, |x_n|\} \quad (\text{Norma do Máximo})$$

$$|x|_S = |x_1| + |x_2| + |x_3| + \dots + |x_n| \quad (\text{Norma da Soma})$$

As propriedades N1, N2 e N3 também são válidas para $|x|_M$ e $|x|_S$.

Para todo $x \in \mathfrak{R}^n$, vale a desigualdade:

$$|x|_M \leq |x| \leq |x|_S \leq n \cdot |x|_M$$

4.4 Distância em \mathfrak{R}^n

A norma em \mathfrak{R}^n da origem à noção de distância em \mathfrak{R}^n . Dados $x, y \in \mathfrak{R}^n$, a distância de x a y é definida por:

$$d(x, y) = |x - y|$$

Assim:

Distância Euclidiana

$$d(x, y) = |x - y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

Distância do Máximo

$$d_M(x, y) = |x - y|_M = \text{Máx}\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \dots, |x_n - y_n|\}$$

Distância da Soma

$$d_S(x, y) = |x - y|_S = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \dots + |x_n - y_n|$$

4.4.1 Propriedades das Distâncias em \mathfrak{R}^n

Para d , d_M e d_S tome $x, y, z \in \mathfrak{R}^n$:

- d1 $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$;
- d2 $d(x, y) = d(y, x)$;
- d3 $x \neq y \Rightarrow d(x, y) > 0$.

Exemplos

Tome $n = 2$ e considere $d: \mathfrak{R}^2 \times \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}$. Dado $x, y \in \mathfrak{R}^2$, sendo $x = (9, 4)$ e $y = (3, 12)$, calcule:

6. $d(x, y)$

Resolução:

7. $d_M(x, y)$ **Resolução:****Resposta:** 88. $d_S(x, y)$ **Resolução:****Resposta:** 14

9. Verifique as desigualdades entre as 3 distâncias.

Resolução:**Resposta:**

4.5 Bolas e Conjuntos Limitados

A BOLA ABERTA de centro num ponto $a \in \mathfrak{R}^n$ e raio $r > 0$ é o conjunto dos pontos $x \in \mathfrak{R}^n$ cuja distância ao ponto a é menor do que r . Notação $B(a; r)$.

$$B(a; r) = \{x \in \mathfrak{R}^n; |x - a| < r\}$$

Analogamente define-se a BOLA FECHADA $B[a; r]$ e a ESFERA $S[a; r]$, ambas com centro a e raio r :

$$B[a; r] = \{x \in \mathfrak{R}^n; |x - a| \leq r\},$$

$$S[a; r] = \{x \in \mathfrak{R}^n; |x - a| = r\}.$$

Exemplo

10. Para $n = 2$, as bolas no plano para as três distâncias podem ser representadas por:**Resolução:****Resposta:**

4.5.1 Definição: Segmento de Reta

O segmento de reta de extremos x, y é o conjunto:

$$[x, y] = \{(1-t)x + ty; 0 \leq t \leq 1\}$$

4.5.2 Definição: Conjunto Convexo

Um subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ diz-se convexo quando contém qualquer segmento de reta cujos extremos pertençam a X , ou seja:

$$x, y \in X \Rightarrow [x, y] \subset X$$

4.5.3 Definição: Ponto de Acumulação

Seja $X \subset \mathbb{R}^n$. Um ponto $a \in \mathbb{R}^n$ chama-se ponto de acumulação do conjunto X quando toda bola aberta de centro a contém algum ponto de X , diferente do ponto a , ou seja:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in X; 0 < |x - a| < \varepsilon$$

O conjunto dos pontos de acumulação de X é representado pela notação X' , chamado de CONJUNTO DERIVADO de X .

4.5.4 Definição: Conjunto Limitado

Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ diz-se limitado quando:

- Existe um número real $c > 0$ tal que $|x| < c, \forall x \in X$;
- ou
- Se, e somente se, está contido em alguma bola.

4.5.5 Definição: Ponto Interior

$a \in \mathbb{R}^n$ é ponto interior de $X \subset \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \exists r > 0; B(a; r) \subset X$.

O conjunto dos pontos interiores de X é representado por $\text{int}X$.

4.5.6 Definição: Ponto Exterior

$a \in \mathbb{R}^n$ é ponto exterior de $X \subset \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \exists r > 0; B(a; r) \cap X = \emptyset$.

O conjunto dos pontos exteriores de X é representado por $\text{ext}X$.

4.5.7 Definição: Ponto Fronteira

$a \in \mathbb{R}^n$ é ponto fronteira de $X \subset \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \forall r > 0; B(a; r) \cap X \neq \emptyset$ e $B(a; r) \cap CX \neq \emptyset$.

CX é o complementar de X . O conjunto dos pontos fronteira de X é representado por $\text{fron}X$ ou ΓX ou ∂X .

Exemplos

11. Dado $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 < 9\}$, determine os conjuntos $\text{int}X$, $\text{ext}X$ e $\text{fron}X$.

Resolução:

Resposta:

12. O mesmo para $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 9\}$.

Resolução:

Resposta:

Conclusão

$$\forall X \subset \mathbb{R}^n; \text{int}X \cup \text{ext}X \cup \text{fron}X = \mathbb{R}^n.$$

4.5.8 Definição: Conjunto Aberto

$$X \subset \mathbb{R}^n \text{ é conjunto aberto} \Rightarrow X = \text{int}X.$$

4.5.9 Definição: Conjunto Fechado

$$X \subset \mathbb{R}^n \text{ é conjunto fechado} \Rightarrow X = X'.$$

4.5.10 Definição: Conjunto Conexo

Diz-se que $X \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto conexo se $\forall x, y \in X, \exists$ linha poligonal unindo x e y , totalmente contida em X .

Exercícios

Tome um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$.

13. Se X é convexo, X é conexo? Justifique.

Resolução:

Resposta:

14. Se X é conexo, X é convexo? Justifique.

Resolução:

Resposta:

15. Dê um exemplo de X desconexo.

Resolução:

Resposta:

4.5.11 Definição: Região Aberta

Uma região aberta em \mathfrak{R}^n é um conjunto conexo ilimitado.

4.5.12 Definição: Região Fechada

Uma região fechada em \mathfrak{R}^n é um conjunto conexo e limitado.

4.6 Exercícios

Dado $X \subset \mathfrak{R}^2$ nos exercícios seguintes, analise X quanto aos itens a) e b) abaixo:

- a) Região aberta ou fechada;
- b) Conjunto aberto ou fechado.

16. $X = \{(x, y) \in \mathfrak{R}^2; x - y \geq 1\}$

Resolução:

Resposta:

17. $X = \{(x, y) \in \mathfrak{R}^2; x - y > 1\}$

Resolução:

Resposta:

18. $X = \{(x, y) \in \mathfrak{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}$

Resolução:

Resposta:

19. $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$

Resolução:

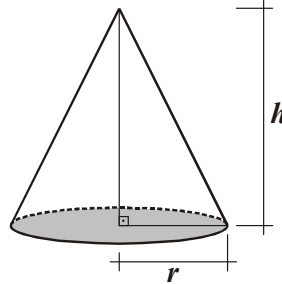
Resposta:

5 Funções em Espaços n-Dimensionais

5.1 Introdução

Considere os seguintes exemplos:

1. O volume “ V ” de um cilindro circular é calculado pela expressão: $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$, sendo que r é o raio da base e h a altura.

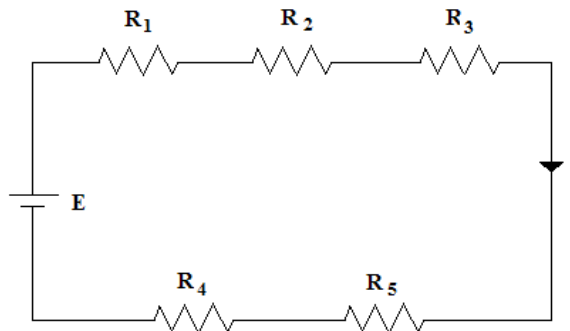


2. A equação de estado de um gás ideal é dada pela seguinte equação:

$$P = \frac{n \cdot R \cdot T}{V}$$

Onde: P = pressão; V = volume; n = massa gasosa em moles; R = constante molar do gás; e T = temperatura.

3. O circuito elétrico da figura que segue tem cinco resistores. A corrente deste circuito depende das resistências R_i , $i = 1, \dots, 5$, onde E é a tensão da fonte.



Todos estes exemplos representam funções de várias variáveis. Assim, no primeiro exemplo, temos que o volume do cone pode ser indicado por uma função de duas variáveis independentes r e h , indicada por $V = V(r, h)$, e cuja regra é $V(r, h) = \pi \cdot r^2 \cdot h$.

No segundo exemplo, temos que a pressão de um gás ideal pode ser representada pela função de três variáveis independentes V , T e n . Desta forma, a regra da referida função é $P(V, T, n) = \frac{n \cdot R \cdot T}{V}$.

Finalmente, no último caso, a corrente do circuito pode ser dada por uma função de cinco variáveis independentes R_1, R_2, R_3, R_4 e R_5 , isto é:

$$I(R_1, R_2, R_3, R_4, R_5) = \frac{E}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5}$$

Conforme será visto, o estudo de funções com três ou mais variáveis não difere muito do estudo das funções de duas variáveis. Desta forma, neste estudo trabalharemos mais com

as funções de duas variáveis independentes, salientando as diferenças fundamentais entre estas funções e as funções de uma única variável independente, além de reforçar as principais analogias existentes entre elas.

Definição

Seja A um conjunto do espaço n -dimensional $A \subseteq \mathfrak{R}^n$, isto é, os elementos de A são n -uplas ordenadas $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ de números reais. Se a cada ponto P do conjunto A associarmos um único elemento $w \in \mathfrak{R}$, temos uma função $f: A \subseteq \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$. Essa função é chamada de função de n variáveis reais.

Simbolicamente:

$$\begin{aligned} f: & \quad A \subseteq \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R} \\ & \quad x \mapsto w = f(x) \\ \text{ou } w = f(x) = & f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Definição: Domínio de Função

Domínio da função f é o conjunto A da definição anterior, isto é,

$$Df = \{x \in A \subseteq \mathfrak{R}^n; w = f(x)\}.$$

Como para as funções de uma variável, em geral, uma função de várias variáveis também é especificada apenas pela regra que a define. Nesse caso, o domínio da função é o conjunto de todos os pontos de $x \in \mathfrak{R}^n$, para os quais a função está definida.

Definição: Imagem de Função

Imagem da função f é o conjunto dos números $w \in \mathfrak{R}$, tais que $w = f(x)$.

$$\text{Im } f = \{w \in \mathfrak{R}; w = f(x)\}.$$

Exemplo

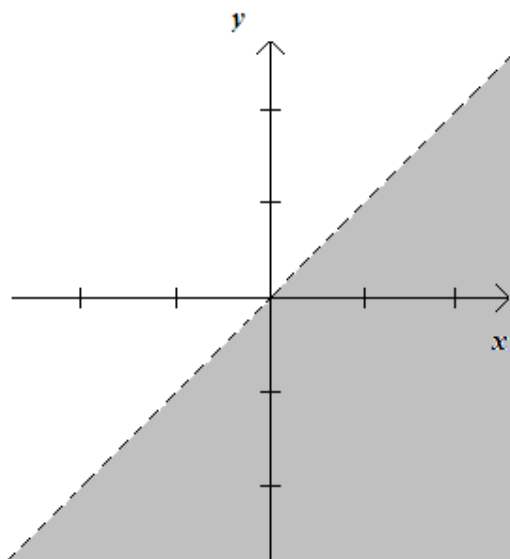
4. Determine o domínio e a imagem da função $z = f(x) = \sqrt{9 - x_1^2 - x_2^2}$ definida de \mathfrak{R}^2 em \mathfrak{R} .

Resolução:

Resolução:

5. Represente graficamente o domínio da função $f(x, y) = \ln(x - y)$.

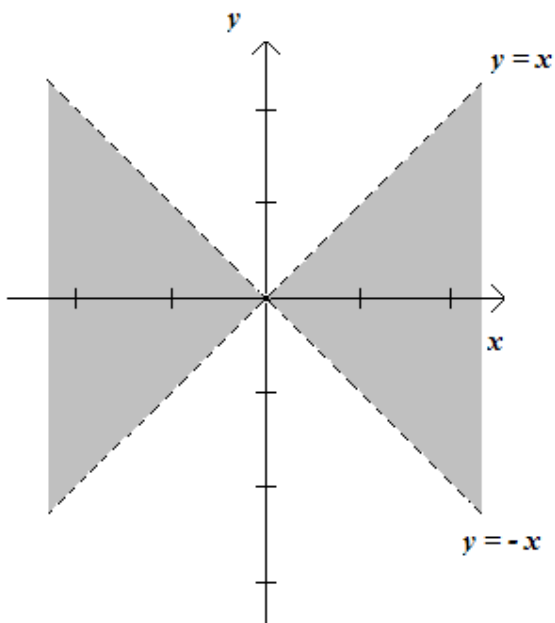
Resolução:



Resposta:

6. Represente graficamente o domínio da função $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 - y^2}}$.

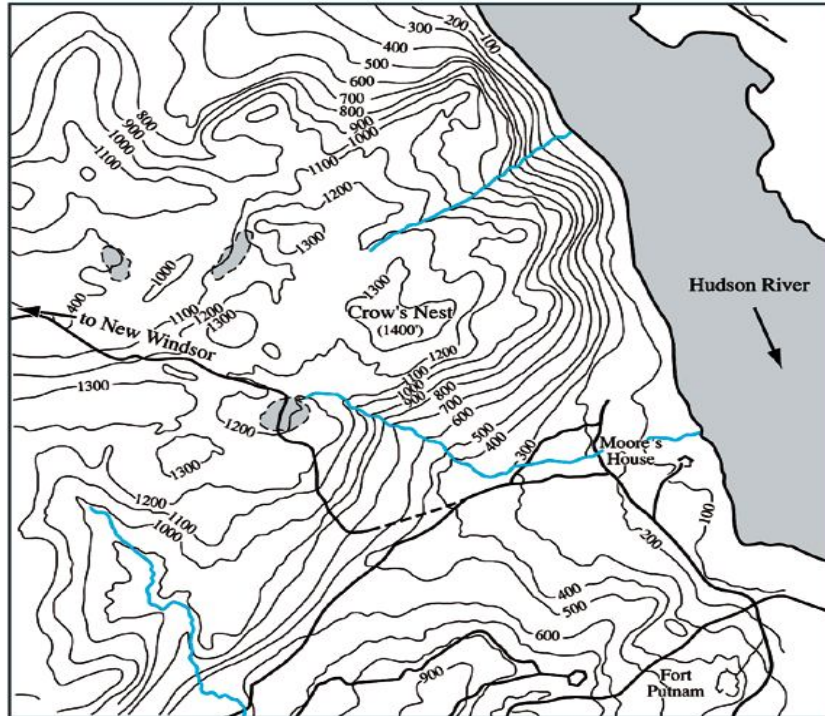
Resolução:



Resposta:

Definição: Curva de Nível (C_n)

Considere $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. O conjunto de pontos $x \in \mathbb{R}^2$ onde uma função $f(x)$ tem um valor constante $f(x) = f(x_1, x_2) = c$ é chamado de curva de nível de f . Representação: C_n .

**Definição: Gráfico de uma função**

O conjunto de todos os pontos $(x_1, x_2, f(x))$ no espaço, para $x \in \mathbb{R}^2$ no domínio de f , é chamado de GRÁFICO de f .

O gráfico de f também é chamado de SUPERFÍCIE $w = f(x) = f(x_1, x_2)$.

Definição: Curva de Contorno (C_c)

A curva no espaço na qual o plano $w = c$ intercepta uma superfície $w = f(x, y)$ é chamada de curva de contorno $f(x, y) = c$. Representação: C_c .

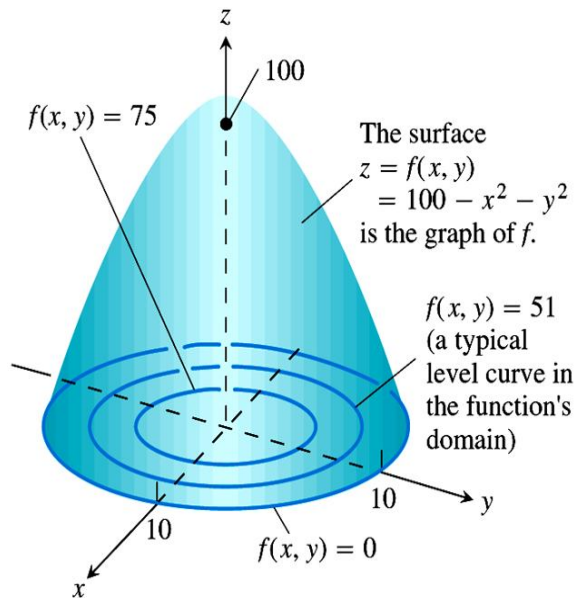
Definição: Conjunto de Nível

Se f é uma função de n variáveis, $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ e k é um número real, um conjunto de nível de f , é o conjunto de todos os pontos $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in Df$ para os quais $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = k$.

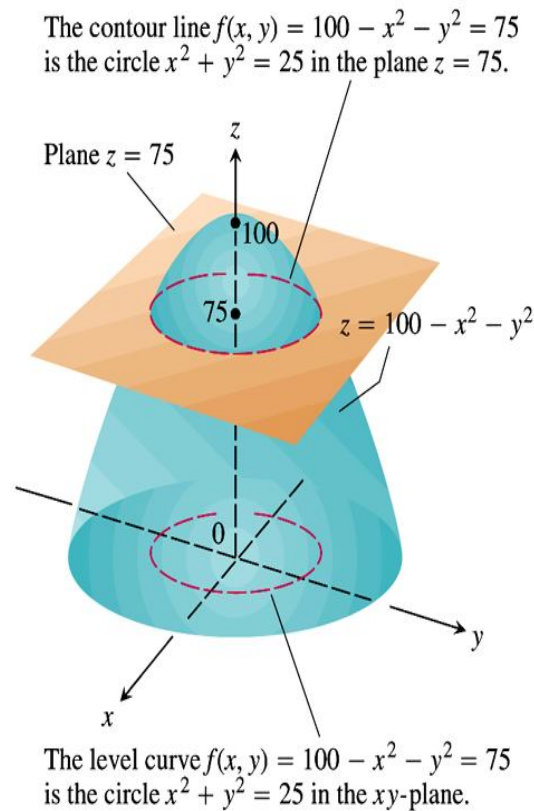
Em particular, quando f é uma função de três variáveis independentes, temos as superfícies de nível. Nesse caso, o conhecimento das superfícies de nível, que podem ser visualizadas no espaço tridimensional, ajuda muito a entender o comportamento da função.

Exemplo

7. No exemplo que segue, podemos observar algumas curvas de nível da função $z = f(x, y) = 100 - x^2 - y^2$.



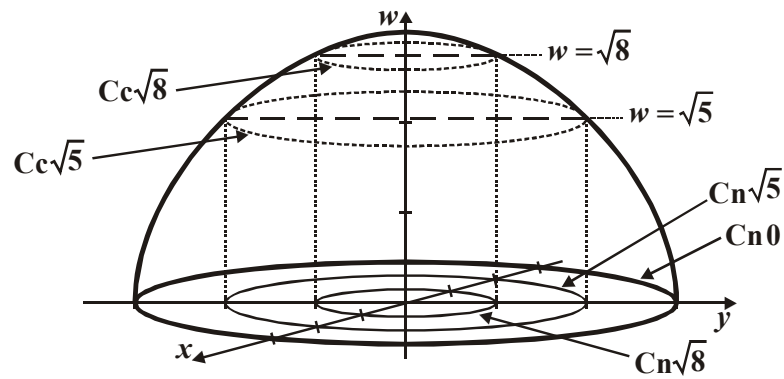
8. No exemplo que segue, podemos observar uma curva de nível e uma curva de contorno da função $z = f(x, y) = 100 - x^2 - y^2$.



Exemplo

9. Represente graficamente $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ e trace as curvas de níveis $f(x, y) = 0$, $f(x, y) = \sqrt{5}$ e $f(x, y) = \sqrt{8}$ no domínio de f no plano.

Resolução:



Resposta:

5.2 Limites e Continuidade de Funções de n -Variáveis Reais

5.2.1 Limites de Funções em \mathbb{R}^n

Definição

Seja $w = f(x) = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ uma função de n variáveis. O LIMITE da função $f(x)$, quando x tende a x_0 , é o número real L se, para todo número real $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que se $x \in B(x_0; \delta)$ então sua imagem $f(x) \in B(L; \varepsilon)$.

Simbolicamente

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Caso particular: Limites de Funções de duas variáveis independentes

Sejam $f: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e (x_0, y_0) um ponto de acumulação de A . Dizemos que o limite de $f(x, y)$, quando (x, y) se aproxima de (x_0, y_0) é um número real L se, para todo $\varepsilon > 0$, existir um $\delta > 0$ tal que $|f(x, y) - L| < \varepsilon$, sempre que $(x, y) \in A$ e $0 < |(x, y) - (x_0, y_0)| < \delta$

Notação:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = L \text{ ou } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = L$$

Propriedades

Tome $L, M, K \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M$.

- $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L \pm M$.
- $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L \cdot M$.
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{L}{M}$ se $M \neq 0$.
- $\lim_{x \rightarrow x_0} K f(x) = K \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = K L$.
- Se p e q forem inteiros, então $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^{p/q} = L^{p/q}$, desde que $L^{p/q} \in \mathbb{R}$.

Exemplos

Calcule os limites:

10. $\lim_{(x,y) \rightarrow (3,-4)} \sqrt{x^2 + y^2}$

Resolução:

Resposta: 5

$$11. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x - xy + 3}{x^2 y + 5xy - y^3}$$

Resolução:

Resposta: -3

$$12. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$$

Resolução:

Resposta: 0

$$13. \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x^2 - y^2}{x - y}$$

Resolução:

Resposta: 2

Proposição

Se $w = f(x) = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ tem limites diferentes ao longo de caminhos diferentes quando x se aproxima de x_0 , então $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ não existe.

Exemplo

14. Aplicando limites por caminhos, mostre que $f(x, y) = \frac{2x^2 y}{x^4 + y^2}$ não tem limite quando (x, y) se aproxima de $(0, 0)$.

Resolução:

Resposta: Logo, $\nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$.

Exercícios

$$15. f(x, y) = \frac{x^4 - y^2}{x^4 + y^2} \text{ (Caminhos } y = k x^2 \text{);}$$

Resolução:**Resposta:** Logo, $\exists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$.

$$16. f(x, y) = \frac{x - y}{x + y} \text{ (Caminhos } y = k x, k \neq -1 \text{);}$$

Resolução:**Resposta:** Logo, $\exists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$.

$$17. f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{y} \text{ (Caminhos } y = k x^2, k \neq 0 \text{);}$$

Resolução:**Resposta:** Logo, $\exists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$.**5.2.2 Continuidade de Funções em \mathcal{R}^n** **Definições:**

1ª) Uma função $w = f(x) = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ é CONTÍNUA NO PONTO $x_0 \in \mathcal{R}^n$ se:

- $\exists f(x)$;
- $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$;
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

2ª) Uma função é CONTÍNUA quando é contínua em todos os pontos de seu domínio.

Proposição:

Sejam f e g funções de duas variáveis contínuas no ponto (x_0, y_0) , então:

- $f + g$ é contínua em (x_0, y_0) ;
- $f - g$ é contínua em (x_0, y_0) ;
- $f \cdot g$ é contínua em (x_0, y_0) ;
- f / g é contínua em (x_0, y_0) , desde que $g(x_0, y_0) \neq 0$

Proposição:

Sejam $w = f(u)$ e $z = g(x, y)$. Se g é contínua em (x_0, y_0) e f é contínua em $g(x_0, y_0)$, então a função composta $f \circ g$ é contínua em (x_0, y_0) .

Observação:

A partir das proposições anteriores podemos afirmar que:

- Uma função polinomial de duas variáveis é contínua em \mathbb{R}^2 ;
- Uma função racional de duas variáveis é contínua em todos os pontos do seu domínio.

Exemplos:

Discutir a continuidade das seguintes funções:

18. $f(x, y) = 2x^2y^2 + 5xy - 2$

Resolução:**Resposta:**

19. $g(x, y) = \frac{x + y - 1}{x^2y + x^2 - 3xy - 3x + 2y + 2}$

Resolução:**Resposta:**

20. $h(x, y) = \ln(x^2y^2 + 4)$

Resolução:**Resposta:**

6 Derivadas

6.1 Derivadas Parciais

6.1.1 Incremento parcial e incremento total

Seja $z = f(x, y)$ uma função de duas variáveis independentes.

Quando damos à variável independente x um acréscimo Δx , enquanto y permanece constante, então o incremento correspondente de z receberá o nome de incremento parcial de z , em relação à x e é denotado por:

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$$

Da mesma maneira, se x permanecer constante e a variável y receber um acréscimo Δy , o incremento parcial de z , em relação à y é:

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

Se agora dermos, simultaneamente um acréscimo Δx para x e Δy para y , obtemos o incremento total de z , que é denotado por:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

Exemplo

1. Se $z = f(x, y) = x \cdot y$, então:

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y) = (x + \Delta x)y - x \cdot y = x \cdot y + \Delta x \cdot y - x \cdot y = y \cdot \Delta x$$

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y) = x(y + \Delta y) - x \cdot y = x \cdot y + x \cdot \Delta y - x \cdot y = x \cdot \Delta y =$$

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = (x + \Delta x) \cdot (y + \Delta y) - x \cdot y =$$

$$x \cdot y + x\Delta y + y\Delta x + \Delta x \cdot \Delta y - x \cdot y = x\Delta y + y\Delta x + \Delta x \cdot \Delta y$$

Definições:

Chama-se derivada parcial de $z = f(x, y)$, em relação à x , no ponto (x_0, y_0) , ao limite:

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x};$$

Analogamente, definimos derivada parcial de $z = f(x, y)$, em relação à y , no ponto (x_0, y_0) , ao limite:

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y};$$

Fazendo $x - x_0 = \Delta x$ e $y - y_0 = \Delta y$, podemos escrever:

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} \text{ e}$$

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0};$$

Definições:

Sejam $f : A \subset \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}$, sendo $(x, y) \mapsto z = f(x, y)$, e $B \subset A$ o conjunto dos pontos (x, y) tais que $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ existe. Chamamos de função derivada parcial de f em relação à x , à

função que a cada $(x, y) \in B$ associa o número $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$.

Analogamente, chamamos de função derivada parcial de f em relação à y , à função que a cada $(x, y) \in B$ associa o número $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$.

Observação:

As derivadas parciais podem também ser denotadas por:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = D_x f(x, y) = f_x(x, y)$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = D_y f(x, y) = f_y(x, y)$$

Observação:

As definições anteriores podem ser estendidas para funções $f : A \subset \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$. Desta forma temos, por exemplo:

1º Seja $f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$

A derivada da função $f(x)$ é:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

2º Seja $f: \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}$

As derivadas parciais de $f(x, y)$ em relação a x e y são as funções f_x e f_y .

$$f_x(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h};$$

$$f_y(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}.$$

3º Seja $f: \mathfrak{R}^3 \rightarrow \mathfrak{R}$

As derivadas parciais de $f(x, y, z)$ são as funções f_x , f_y e f_z .

$$f_x(x, y, z) = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y, z) - f(x, y, z)}{h};$$

$$f_y(x, y, z) = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h, z) - f(x, y, z)}{h};$$

$$f_z(x, y, z) = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y, z+h) - f(x, y, z)}{h};$$

para $w = f(x, y, z)$.

4º Seja $f: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$

As derivadas parciais de $f(x)$ para $x \in \mathfrak{R}^n$:

$$f_{x_1}(x) = \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + h, x_2, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{h};$$

$$f_{x_2}(x) = \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2 + h, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{h};$$

$$\vdots$$

$$f_{x_n}(x) = \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_n} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_n + h) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{h};$$

2. Usando a definição, encontre a derivada parcial de $z = f(x, y) = 16 - x^2 - y^2$ em relação à x no ponto $(1, 2)$.

Resolução:

Resposta: -2

3. Usando a definição, encontre as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$, sendo $f(x, y) = 3x^2 - 2xy + y^2$.

Resolução:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) =$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) =$$

Resposta: $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 6x - 2y$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2x + 2y$

Observação:

Na prática, podemos obter as derivadas parciais mais facilmente, usando as regras de derivação das funções de uma variável. Nesse caso, para calcular $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$, mantemos y constante e para calcular $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$, x é mantido constante.

6.1.2 Regras de derivação

Para as derivadas parciais, valem regras de derivação análogas às das funções de uma variável.

Sejam $u = f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $v = g(x) = g(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

$$f_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} u = u_{x_i} \text{ e } g_{x_i} = \frac{\partial g}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} v = v_{x_i}.$$

Produto

$$u v \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_i} (u v) = (u v)_{x_i} = u_{x_i} v + u v_{x_i}.$$

Quociente

$$\frac{u}{v} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{u}{v} \right) = \left(\frac{u}{v} \right)_{x_i} = \frac{u_{x_i} v - u v_{x_i}}{v^2}.$$

Potência

$$u^n \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_i} (u^n) = (u^n)_{x_i} = n u^{n-1} \cdot u_{x_i}.$$

Exercícios

Considerando a função $f(x, y) = x^3 y^2 - 2x^2 y + 3x$ calcule o que se pede:

4. $f_x(x, y)$

Resolução:

Resposta: $3x^2 y^2 - 4xy + 3$

5. $f_y(x, y)$

Resolução:

Resposta: $2x^3 y - 2x^2$

6. $f_x(2, -1)$

Resolução:

Resposta: 23

7. $f_y(2,-1)$

Resolução:**Resposta:** -24**Exercícios**

8. Encontre $\frac{\partial f}{\partial y}$ se $f(x, y) = y \sin(xy)$.

Resolução:

Resposta: $\frac{\partial}{\partial y}(u \cdot v) = \sin(xy) + y \cdot x \cos(xy)$.

9. Encontre f_x e f_y se $f(x, y) = \frac{2y}{y + \cos x}$.

Resolução:

Resposta: $f_x = \frac{2y \sin x}{(y + \cos x)^2}$ e $f_y = \frac{2 \cos x}{(y + \cos x)^2}$

10. Encontre f_x e f_y se $f(x, y) = \sqrt[y]{\tan x} = w$.

Resolução:

$$\text{Resposta: } f_x = \frac{\sec^2 x}{y^y \sqrt[y]{(\tan x)^{y-1}}} \text{ e } f_y = -\frac{\sqrt[y]{\tan x} \cdot \ln(\tan x)}{y^2}$$

11. Usando as regras de derivação, encontre as derivadas parciais das seguintes funções:

(a) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

Resolução:

$$\text{Resposta: } \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{-y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

(b) $f(x, y) = \frac{x + y}{x^2 + y^2}$

Resolução:

$$\text{Resposta: } \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y^2 - 2xy - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x^2 - 2xy - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

(c) $f(x, y) = e^{x/y}$

Resolução:

Resposta: $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{e^{x/y}}{y}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{x e^{x/y}}{y^2}$

(d) $f(x, y) = \tan(x^2 - y^2)$

Resolução:

Resposta: $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = [\sec^2(x^2 - y^2)] \cdot (2x)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = [\sec^2(x^2 - y^2)] \cdot (-2y)$.

(e) $f(x, y, z) = x^2 \cdot \sin^2(yz)$

Resolução:

Resposta: $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 2x \sin^2(yz)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = x^2 z \sin(2yz)$ e $\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = x^2 y \sin(2yz)$.

6.1.3 Derivadas Parciais Sucessivas

Se $w = f(x)$ é uma função de n variáveis e admite derivadas parciais em relação a todos os x_1, x_2, \dots, x_n e estas funções derivadas parciais admitem derivadas parciais, então suas derivadas são DERIVADAS PARCIAIS DE SEGUNDA ORDEM de $w = f(x)$.

Se as derivadas de segunda ordem são parcialmente deriváveis, suas derivadas são chamadas de DERIVADAS PARCIAIS DE TERCEIRA ORDEM de $w = f(x)$.

Assim, segue para derivadas de ordem superior.

$$w = f(x, y) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = f_x \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy} \Rightarrow \dots$$

$$w = f(x, y) \left\{ \begin{array}{l} f_x = \frac{\partial w}{\partial x} \\ f_y = \frac{\partial w}{\partial y} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} f_{xx} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ f_{xy} = \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \\ f_{yx} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ f_{yy} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} f_{xxx} = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \\ f_{xxy} = \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \\ f_{xyx} = \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y \partial x} \\ f_{xyy} = \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial y \partial x} \\ f_{yxx} = \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial x \partial y} \\ f_{yxy} = \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x \partial y} \\ f_{yyx} = \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \\ f_{yyy} = \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \end{array} \right.$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{1\text{ra. ordem}}$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{2\text{da. ordem}}$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{3\text{ra. ordem}}$

Teorema

Seja f uma função de duas variáveis x e y . Se f, f_x, f_y, f_{xy} e f_{yx} são contínuas em uma região aberta R , então $f_{xy} = f_{yx}$ em toda R .

Este teorema também é válido para derivadas de ordens superiores. Por exemplo:

$$f_{xyx} = f_{yxx} = f_{xxy}.$$

Exercícios

12. Seja $f(x, y) = x^3 y^2 - 2x^2 y + 3x$. Prove que $f_{xy} = f_{yx}$.

Resolução:

Resposta:

$$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx}$$

13. Prove que $f_{xyx} = f_{yxx} = f_{xxy}$ para $f(x, y) = x^3 y^2 - 2x^2 y + 3x$.

Resolução:

Resposta: $f_{xxy} = f_{xyx} = f_{yxx} = 12xy - 4$

14. Dada a função $f(x, y) = e^{2x+3y}$, calcule:

(a) $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x, y)$

Resolução:

Resposta: $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x, y) = 8e^{2x+3y}$

(b) $\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x, y)$

Resolução:

Resposta: $\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x, y) = 27e^{2x+3y}$

(c) Verifique a igualdade seguinte: $\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}$.

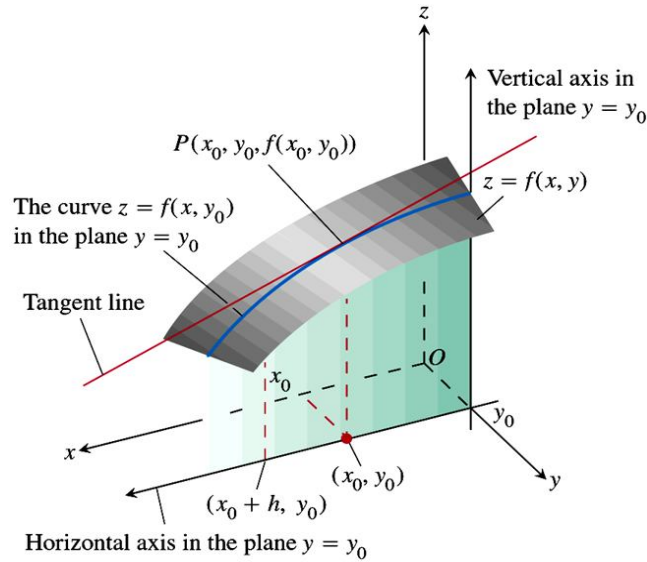
Resolução:

Resposta: $\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = 18e^{2x+3y}$

6.1.4 Interpretação Geométrica das Derivadas Parciais

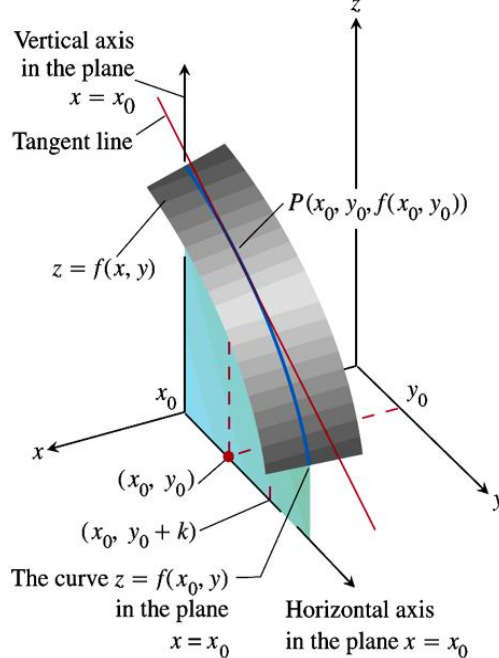
Vamos supor que $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \rightarrow z = f(x, y)$ admite derivadas parciais em um ponto $(x_0, y_0) \in A$. Para $y = y_0$, temos que $f(x, y_0)$ é uma função de uma variável cujo gráfico é uma curva C , resultante da intersecção da superfície $z = f(x, y)$ com o plano $y = y_0$. A inclinação ou coeficiente angular da reta tangente à curva C no ponto (x_0, y_0) é dado por:

$$\tan \alpha = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$$



De maneira análoga, temos que a inclinação da reta tangente à curva C , resultante da intersecção da superfície $z = f(x, y)$ com o plano $x = x_0$, é:

$$\tan \beta = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$$



15. Encontre a declividade da reta tangente à curva de intersecção da superfície

$$w = \sqrt{24 - x^2 - 2y^2} \text{ com o plano } y = 2, \text{ no ponto } (2, 2, 2\sqrt{3}).$$

Resolução:

$$\text{Resposta: } \frac{\partial w}{\partial x}(2, 2) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

6.1.5 Equações das Retas Tangentes

Dada a função $w = f(x, y)$, as retas tangentes ao gráfico de w no ponto $P(x_0, y_0, w_0)$, nos planos verticais $y = y_0$ e $x = x_0$, são dadas da seguinte forma.

Retas Tangentes: Forma Simétrica

$$y = y_0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{x - x_0}{1} = \frac{w - w_0}{f_x(x_0, y_0)} \\ y = y_0 \end{cases} \quad x = x_0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{y - y_0}{1} = \frac{w - w_0}{f_y(x_0, y_0)} \\ x = x_0 \end{cases}$$

Retas Tangentes: Forma Paramétrica

$$y = y_0 \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + \lambda \\ y = y_0 \\ w = w_0 + \lambda f_x(x_0, y_0) \end{cases} \quad x = x_0 \Rightarrow \begin{cases} y = y_0 + \lambda \\ x = x_0 \\ w = w_0 + \lambda f_y(x_0, y_0) \end{cases}$$

Exemplo

Determine as equações das retas tangentes ao gráfico de $w = f(x, y)$ com $w = 7 - x^2 - y^2 + 2x + 2y$.

16. No ponto $(2, 3, 4)$.

Resolução:

Resposta:

17. No ponto (1,1,9).

Resolução:

Resposta:

Exercícios de derivadas como taxas de variação:

18. Se a temperatura T depende do tempo t e da altitude h , de acordo com a regra:

$$T(t, h) = \frac{-5t^2}{36} + \frac{10t}{3} - \frac{h}{100} + 10, \text{ então calcule:}$$

(a) Como varia a temperatura em relação ao tempo, no instante $t_0 = 12$ horas, num ponto de altitude $h_0 = 100$ metros?

Resolução:

Resposta: 0

(b) Como varia a temperatura em relação à altitude, no instante $t_0 = 12$ horas, num ponto de altitude $h_0 = 100$ metros?

Resolução:

Resposta: $-\frac{1}{100}$

19. De acordo com a lei do gás ideal para um gás confinado, se P Newton por unidade quadrada é a pressão, V unidades cúbicas é o volume, e T graus a temperatura, temos a fórmula: $P V = k T$ [equação (1)] onde k é uma constante de proporcionalidade. Suponha que o volume de gás em um certo recipiente seja 100 cm^3 e a temperatura seja 90° e $k = 8$.

(a) Encontre a taxa de variação instantânea de P por unidade de variação em T , se V permanecer fixo em 100.

Resolução:

Resposta: Logo, quando $T = 90$ e $V = 100$, $\frac{\partial P}{\partial T} = 0,08$ é a resposta desejada.

(b) Use o resultado de (a) para aproximar a variação de pressão se a temperatura aumentar para 92° C .

Resolução:

Resposta: $0,16 \text{ N / m}^2$

(c) Encontre a taxa de variação instantânea de V por unidade de variação em P se T permanecer fixo em 90° .

Resolução:

Resposta: $\frac{\partial V}{\partial P} = -\frac{125}{9}$

(d) Suponha que a temperatura permaneça constante. Use o resultado de (c) para encontrar a variação aproximada no volume para produzir a mesma variação na pressão, obtida em (b).

Resolução:

Resposta: $-\frac{20}{9}$

20. O volume V de um cone circular é dado por $V = \frac{\pi}{24} y^2 \sqrt{4s^2 - y^2}$, onde s é o comprimento da geratriz e y o diâmetro da base.

(a) Encontre a taxa de variação instantânea do volume em relação à geratriz se o valor $y=16$, enquanto a geratriz s varia. Calcule essa taxa de variação no instante em que $s=10\text{ cm}$.

Resolução:

$$\text{Resposta: } \frac{\partial V}{\partial s} = \frac{320\pi}{9} \text{ cm}^3 / \text{cm}$$

(b) Suponha que o comprimento da geratriz permaneça constante com o valor de $s=10\text{ cm}$. Considerando que o valor do diâmetro varia, encontre a taxa de variação do volume em relação ao diâmetro quando $y=16\text{ cm}$.

Resolução:

$$\text{Resposta: } \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{16\pi}{9} \text{ cm}^3 / \text{cm}$$

6.1.6 Diferenciabilidade

Diferenciabilidade para funções de uma variável

Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Se f é derivável no ponto x_0 , então, por definição,

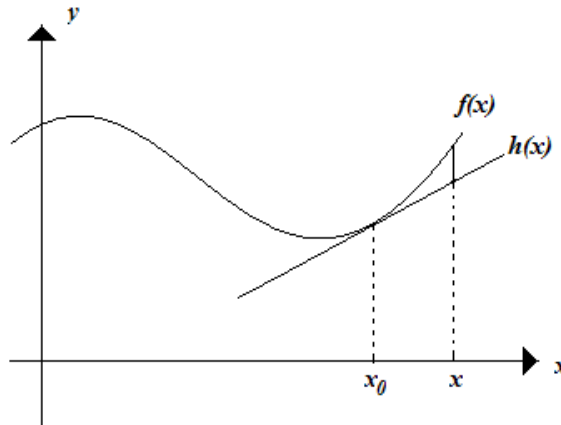
$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$
 Assim:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right] = 0 \text{ ou}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - [f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)]}{x - x_0} \right] = 0$$

Esta expressão nos diz que a função $h(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, que é a reta tangente ao gráfico de f no ponto (x_0, y_0) é uma “boa aproximação” de f perto de x_0 .

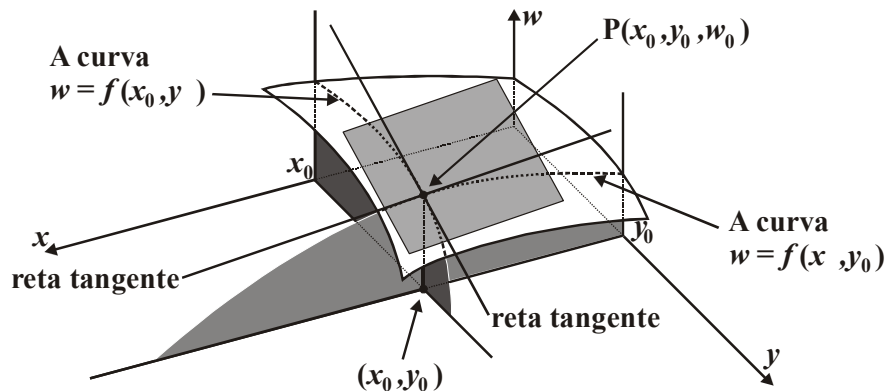
Em outras palavras, quando x se aproxima de x_0 , a diferença entre f e h se aproxima de zero de uma forma mais rápida.



Plano Tangente

Foi visto que a derivada parcial $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$ é o coeficiente angular da reta tangente à curva de intersecção do plano $y = y_0$ com a superfície $z = f(x, y)$, no ponto (x_0, y_0) . Da mesma maneira, a derivada parcial $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$ é o coeficiente angular da reta tangente à curva de intersecção do plano $x = x_0$ com a superfície $z = f(x, y)$, no ponto (x_0, y_0) .

Intuitivamente percebemos que se existir um plano tangente à superfície $z = f(x, y)$, no ponto (x_0, y_0) , então as retas que tem $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$ e $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$ como coeficientes angulares estão contidas neste plano.



Assim, se existe o plano tangente a $z = f(x, y)$, passando pelo ponto $P(x_0, y_0, z_0)$, sua equação é:

- (1) $h(x, y) = a x + b y + c$.

As inclinações nas direções dos eixos x e y são dadas pelas equações (2) e (3), respectivamente:

- (2) $a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$.
- (3) $b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

O ponto $P(x_0, y_0, w_0)$ satisfaz a equação (1), logo, obtém-se a equação (4):

- (4) $h(x_0, y_0) = f(x_0, y_0) = w_0$.

Substituindo (2) e (3) em (1), chega-se a equação (5):

- (5) $h(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)y + c$.

Substituindo (4) em (5), chega-se a equação (6):

- $f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)x_0 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)y_0 + c$, ou
- (6) $c = w_0 - f_x(x_0, y_0)x_0 - f_y(x_0, y_0)y_0$.

Assim, substituindo (6) em (5), obtém-se o plano tangente ao gráfico de $w = f(x, y)$ no ponto $P(x_0, y_0, w_0)$ pela equação (7):

- (7) $h(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$.

Diferenciabilidade para funções de duas variáveis

Diz-se que a função $f(x, y)$ é diferenciável no ponto (x_0, y_0) se as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ existem e se

- (8) $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - h(x,y)}{|(x,y) - (x_0,y_0)|} = 0$.

Na equação (8), se tem:

- $h(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$;
- $|(x, y) - (x_0, y_0)| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$.

Observação

De uma maneira informal, dizemos que $f(x, y)$ é diferenciável em (x_0, y_0) se o plano dado pela equação (7) nos fornece uma “boa aproximação” para $f(x, y)$ no ponto (x_0, y_0) .

Proposição

Se $f(x, y)$ é diferenciável no ponto (x_0, y_0) , então f é contínua nesse ponto.

Exemplos

21. Pela definição acima, provar que a função $f(x, y) = x^2 + y^2$ é diferenciável em \mathcal{R}^2 .

Resolução:

Resposta: Logo, f é diferenciável em \mathfrak{R}^2 .

Nos exercícios a seguir, verifique se as funções dadas são diferenciáveis na origem, isto é, $(x_0, y_0) = (0,0)$.

$$22. f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Resolução:

Resposta: Logo, f não é diferenciável na origem.

$$23. f(x, y) = \begin{cases} \frac{2y^3}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0,0) \end{cases}.$$

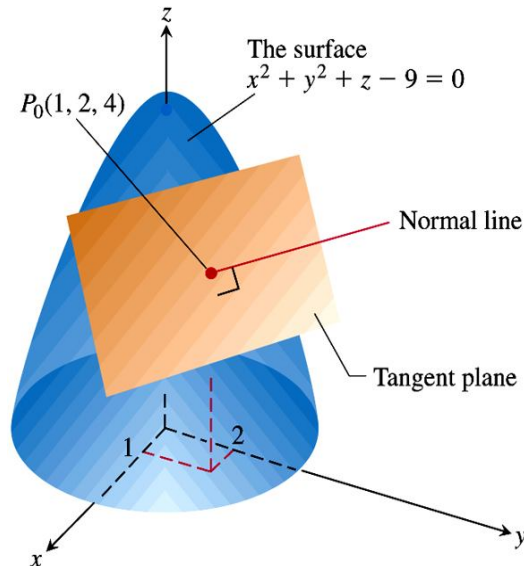
Resolução:

Resposta: Logo, f não é diferenciável na origem.

Plano Tangente

Seja $f: \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}$ diferenciável no ponto (x_0, y_0) . Chama-se de plano tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ ao plano dado pela equação a seguir.

$$w - f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0).$$



Exemplos

Determine, se existir, o plano tangente ao gráfico das funções dadas nos pontos indicados.

24. $w = x^2 + y^2$ nos pontos: a) $P_1(0,0,0)$; b) $P_2(1,1,2)$.

Resolução:

Resposta:

25. $w = \sqrt{2x^2 + y^2}$ nos pontos: a) $P_1(0,0,0)$; b) $P_2(1,1,\sqrt{3})$.

Resolução:

Resposta:

6.2 Gradiente

Seja $w = f(x, y)$ que admite derivadas parciais de 1ª ordem em (x_0, y_0) . O gradiente de f no ponto (x_0, y_0) é um vetor com as derivadas f_x e f_y tal que:

$$\text{grad } f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right) \text{ ou } \nabla f(x_0, y_0) = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)).$$

Generalizando este conceito, temos:

$$\begin{aligned} w = f(x, y), & \quad w = f(x, y, z), \dots, & \quad w = f(x_1, x_2, \dots, x_n); \\ \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right), & \quad \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right), \dots, & \quad \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right). \end{aligned}$$

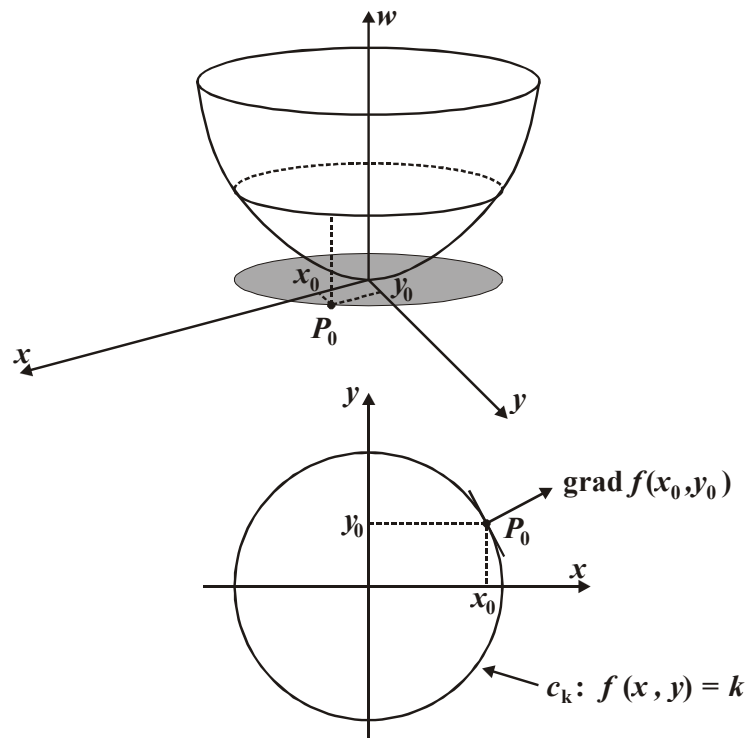
Proposição

Seja $f(x, y)$ uma função tal que, através do ponto $P_0(x_0, y_0)$, passa uma curva de nível c_k de f . Se $\text{grad } f(x_0, y_0)$ não for nulo, então ele é perpendicular à curva de nível c_k em (x_0, y_0) , isto é, ele é perpendicular à reta tangente à curva c_k no ponto P_0 .

Exemplo

26. Seja $w = f(x, y) = x^2 + y^2$. Graficamente, o $\text{grad } f(x_0, y_0)$ é dado por:

Resolução:

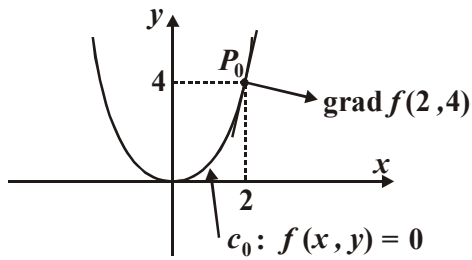


$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \right) = (2x_0, 2y_0)$$

Resposta:

27. Seja $w = f(x, y) = x^2 - y$. Graficamente, o $\text{grad } f(2, 4)$ é dado por:

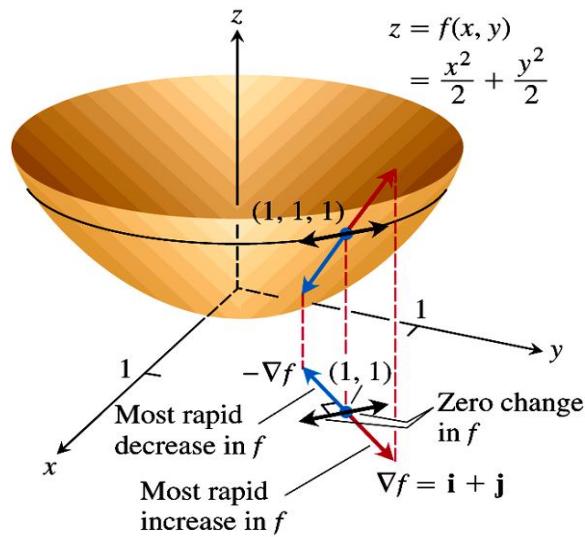
Resolução:



Resposta:

Observação:

O gradiente é um vetor que indica o sentido de mais rápido crescimento de uma função em um ponto.



6.3 Diferenciais

Seja $w = f(x, y)$ uma função diferenciável no ponto (x_0, y_0) . A diferencial de f em (x_0, y_0) é definida pela função ou transformação linear:

$$T: \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}$$

$$T(x - x_0, y - y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0),$$

ou, para $h = x - x_0$ e $k = y - y_0$:

$$T(h, k) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k \quad (01)$$

T dá uma aproximação do acréscimo Δw em (x_0, y_0) :

$$\Delta w = f(x, y) - f(x_0, y_0).$$

Em relação a x e y , os acréscimos são:

$$\Delta x = x - x_0 \text{ e } \Delta y = y - y_0.$$

Define-se a diferencial das variáveis independentes x e y como os acréscimos Δx e Δy :

$$dx = \Delta x \text{ e } dy = \Delta y.$$

A diferencial de f em (x, y) relativa aos acréscimos Δx e Δy é indicada por dw ou df :

$$dw = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dy \quad (02)$$

dw é a DIFERENCIAL TOTAL de $w = f(x, y)$.

Exemplos

28. Calcule a diferencial de $f(x, y) = x + \sqrt{xy}$ no ponto $(1, 1)$.

Resolução:

Resposta: $df(1, 1) = \frac{3}{2}dx + \frac{1}{2}dy.$

29. Dada a função $w = x^2 + y^2 - xy$.

- a) Determine uma aproximação para o acréscimo da variável dependente quando (x, y) passa de $(1,1)$ para $(1,001;1,02)$.

Resolução:

Resposta: $\Delta w \cong 0,021$.

- b) Calcular Δw quando as variáveis independentes sofrem a variação em a).

Resolução:

Resposta: $\Delta w = 0,021381$

- c) Calcular o erro obtido da aproximação de dw como Δw .

Resolução:

Resposta: $0,000381$

6.3.1 Generalizando as diferenciais

Tome $w = f(x, y, z)$ em (x_0, y_0, z_0) , sua diferencial é:

$$dw = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) dy + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) dz.$$

Tome $w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ em $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, sua diferencial é:

$$dw = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_n.$$

Exercícios

30. Calcule a diferencial total da função: $w = x^2 + y^2 + e^{xyz}$.

Resolução:

Resposta: $dw = (2x + yz e^{xyz}) dx + (2y + xz e^{xyz}) dy + xy e^{xyz} dz$

31. Calcule a diferencial total da função: $w = x_1 x_2 - x_2 x_3 + x_3 x_4$.

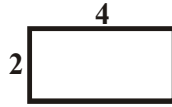
Resolução:

Resposta: $dw = x_2 dx_1 + (x_1 - x_3) dx_2 + (x_4 - x_2) dx_3 + x_3 dx_4$.

32. Nos itens a) e b), calcule o valor aproximado para a variação da área na figura quando os lados são modificados de:

- a) 4cm e 2cm para 4,01cm e 2,001cm, num retângulo;

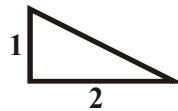
Resolução:



Resposta: $0,024\text{cm}^2$.

- b) 2cm e 1cm para 2,01cm e 0,5cm, num triângulo retângulo.

Resolução:



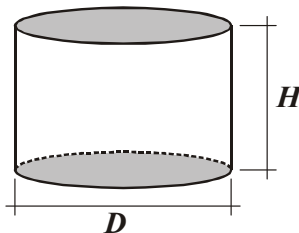
Resposta: $-0,495\text{cm}^2$.

33. Calcular o valor aproximado de $(1,001)^{3,02}$.

Resolução:

Resposta: $(1,001)^{3,02} \cong 1,003$.

34. O diâmetro e a altura de um cilindro circular reto medem, com um erro provável de $0,2 \text{ pol}$ em cada medida, respectivamente, 12 pol e 8 pol . Qual é, aproximadamente, o máximo erro possível no cálculo do volume?



Resolução:

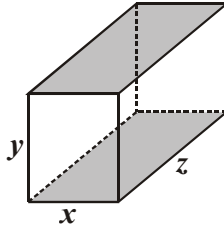
Resposta: $dV \cong 16,8\pi \text{ pol}^3$

35. Dada a superfície $z = \frac{x-y}{x+y}$, se no ponto $x=4$, $y=2$, x e y são acrescidos de $\frac{1}{10}$, qual é a variação aproximada de z ?

Resolução:

Resposta: $\Delta z \cong -0,01075$

36. As dimensões de uma caixa são 10 cm , 12 cm e 15 cm . Essas medidas têm um possível erro de $0,02\text{ cm}$. Encontre, aproximadamente, o máximo erro no cálculo do volume.



Resolução:

Resposta: Logo: $\Delta V \cong 9\text{ cm}^3$.

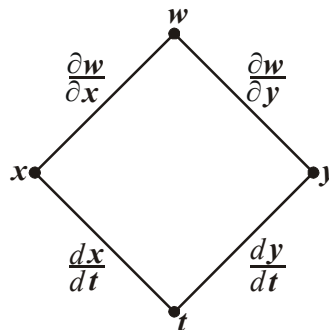
6.4 Derivadas de Funções Compostas

6.4.1 Regra da Cadeia para Funções de Duas Variáveis Intermediárias

Se $w = f(x, y)$ for diferenciável e x e y forem funções diferenciáveis de t , então w será uma função diferenciável de t e:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

(DIAGRAMA)



Exemplo

37. Use a regra da Cadeia para encontrar a derivada de $w = x \cdot y$ em relação a t ao longo do caminho $x = \cos t$, $y = \sin t$. Qual é o valor da derivada em $t = \frac{\pi}{2}$?

Resolução:

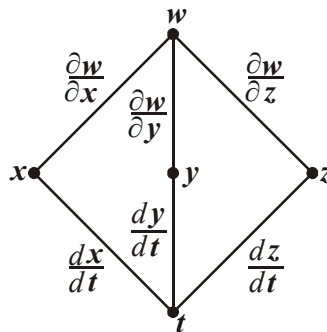
Resposta: -1

6.4.2 Regra da Cadeia para Funções de Três Variáveis Intermediárias

Se $w = f(x, y, z)$ for diferenciável e x , y e z forem funções diferenciáveis de t , então w será uma função diferenciável de t e:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

(DIAGRAMA)



Exemplo

38. Encontre $\frac{dw}{dt}$ sendo que $w = x y + z$, $x = \cos t$, $y = \sin t$ e $z = t$. Determine o valor da derivada em $t=0$.

Resolução:

Resposta: 2

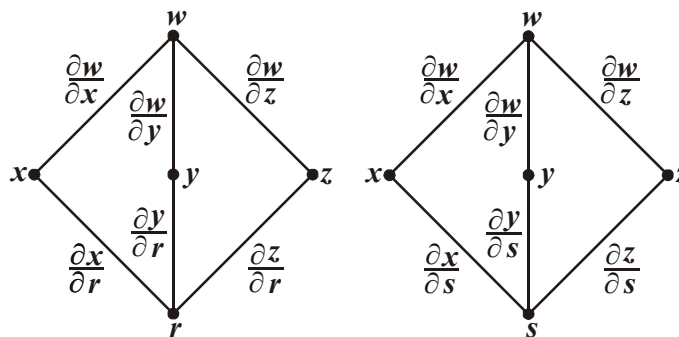
6.4.3 Regra da Cadeia para Duas Variáveis Independentes e Três Variáveis Intermediárias

Sejam $w = f(x, y, z)$, $x = g(r, s)$, $y = h(r, s)$ e $z = k(r, s)$. Se todas as quatro funções forem diferenciáveis, então w terá derivadas parciais em relação a r e s , dadas pelas fórmulas a seguir.

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial r}$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s}$$

(DIAGRAMA)



Exemplo

39. Expresse $\frac{\partial w}{\partial r}$ e $\frac{\partial w}{\partial s}$ em termos de r e s se: $w = x + 2y + z^2$, $x = \frac{r}{s}$, $y = r^2 + \ln s$, $z = 2r$.

Resolução:

Resposta: $\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{1}{s} + 12r$ e $\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{2}{s} - \frac{r}{s^2}$

6.4.4 Regra da Cadeia Generalizada

Suponha que $w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x_1 = g_1(y_1, y_2, \dots, y_m)$, $x_2 = g_2(y_1, y_2, \dots, y_m)$, ..., $x_n = g_n(y_1, y_2, \dots, y_m)$ sejam todas funções diferenciáveis, então w terá derivadas parciais em relação a y_1, y_2, \dots, y_m , dadas pelas fórmulas:

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial y_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial y_1} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial y_1} \\ \frac{\partial w}{\partial y_2} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial y_2} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial y_2} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial y_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial w}{\partial y_m} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial y_m} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial y_m} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial y_m} \end{cases}$$

ou $\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial x} * \frac{\partial x}{\partial y}$ obs.: $\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}$.

REPRESENTAÇÃO EM FORMA MATRICIAL:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial y_1} & \frac{\partial w}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial w}{\partial y_m} \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x_1} & \frac{\partial w}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial w}{\partial x_n} \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial x}{\partial y} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial x_2}{\partial y_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \frac{\partial x_n}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial y_m} \end{bmatrix}.$$

Exemplo

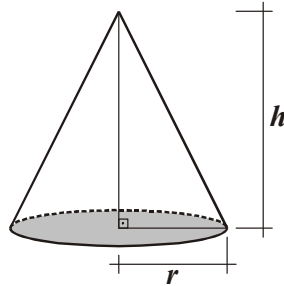
40. Dada a função $w = x^2 + y^2 + z^2$ e sabendo que $x = r \cos \theta \sin \gamma$, $y = r \sin \theta \sin \gamma$ e $z = r \cos \gamma$, calcular as derivadas da função w em relação a r , θ e γ .

Resolução:

Resposta: $\frac{\partial w}{\partial r} = 2r$, $\frac{\partial w}{\partial \theta} = 0$ e $\frac{\partial w}{\partial \gamma} = 0$

Exercícios:

41. A altura de um cone circular é de $h=100 \text{ pol}$ e decresce a razão de 10 pol/seg . O raio da base é de $r=50 \text{ pol}$ e cresce a razão de 5 pol/seg . Com que velocidade está variando o volume, quando $h=100 \text{ pol}$ e $r=50 \text{ pol}$?

**Resolução:**

Resposta: Portanto, o volume cresce à taxa de $26180 \text{ pol}^3/\text{seg}$ no dado instante

42. Use a lei do gás ideal com $k=10$ para encontrar a taxa de variação da temperatura no instante em que o volume do gás é 120 cm^3 e o gás está sob uma pressão de 8 din/cm^2 , se o volume cresce à taxa de $2 \text{ cm}^3/\text{seg}$ e a pressão decresce à taxa de $0,1 \text{ din/cm}^2$ (din , unidade de força) por segundo.

Resolução:

Resposta: A temperatura cresce à taxa de $0,4$ graus por segundo no dado instante.

6.4.5 Derivadas de Funções Implícitas**1º Caso: $F(x,y) = 0$ com $y = f(x)$**

Tendo $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ no ponto $(x, f(x))$, pode-se obter $\frac{\partial y}{\partial x}$ aplicando-se a regra da cadeia

$$\text{para } F(x, y). \text{ Então: } \frac{\partial F}{\partial x} \underbrace{\frac{\partial x}{\partial x}}_{=1} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

Exemplo:

43. Encontre $\frac{\partial y}{\partial x}$ para $y^2 - x^2 - \sin xy = 0$.

Resolução:

Resposta: $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{2x + y \cos xy}{2y - x \cos xy}$

44. Dada a equação $x^2 + y^2 = 1$, encontre $\frac{\partial y}{\partial x}$ usando derivação por duas formas:

- a) Derivando implicitamente;
b) Derivando através de função de uma variável.

• a) $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$

Resolução:

Resposta: $\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{x}{y}$

• b) $y = \sqrt{1 - x^2}$

Resolução:

Resposta: $\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{x}{y}$

2º Caso: $F(x, y, z) = 0$ com $z = f(x, y)$

Tendo $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$ no ponto $(x, y, f(x, y))$, podem-se obter $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ aplicando-se a regra da cadeia para $F(x, y, z)$.

• Em relação a x : $\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$.

• Em relação a y : $\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$.

Exemplo

45. Sabendo que $z = f(x, y)$ é definida por $x^4 y + y^3 + z^3 + z = 5$, determine $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Resolução:

Resposta: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-4x^3 y}{3z^2 + 1}$ e $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-(x^4 + 3y^2)}{3z^2 + 1}$

6.5 Máximos e Mínimos de Funções de Várias Variáveis

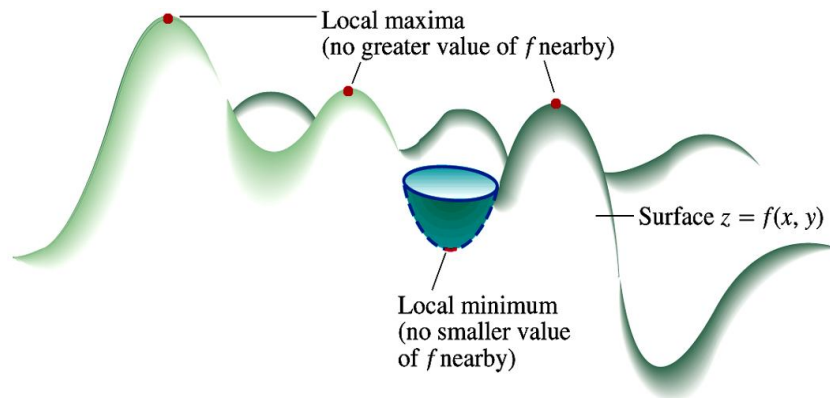
Seja $w = f(P)$ uma função de n variáveis e seja $P_0 \in D(f)$.

Definição 1: Máximo Local (ou Máximo relativo)

$f(P_0)$ é um valor máximo local de f se $f(P_0) \geq f(P)$ para todo ponto P pertencente a uma vizinhança de P_0 .

Definição 2: Mínimo Local (ou Mínimo relativo)

$f(P_0)$ é um valor mínimo local de f se $f(P_0) \leq f(P)$ para todo ponto P pertencente a uma vizinhança de P_0 .

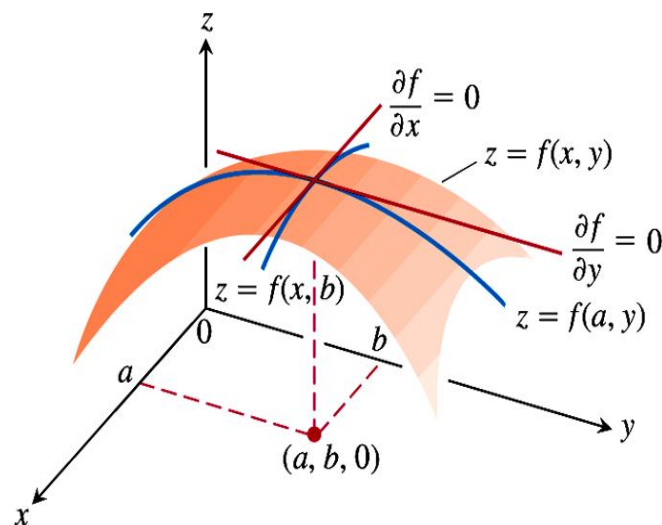


Observação

P_0 é ponto de máximo ou mínimo de f .

Definição 3: Ponto Crítico

P_0 é um ponto crítico de $w = f(P)$ se, todas as derivadas parciais de f se anulam ou não existem em P_0 .



Teorema 1

Se $w=f(P)$ tiver um valor de máximo ou mínimo local em P_0 , então, P_0 é um ponto crítico de f . (A recíproca não é verdadeira).

Teorema 2

Tome $P \in \mathbb{R}^2$ ou $P=(x, y)$. Seja $P_0=(x_0, y_0)$ um ponto crítico de $w=f(P)$, diferenciável até a segunda ordem e $H(P)$ o seu Hessiano definido por:

$$H(P) = H(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}. \quad (\text{Determinante})$$

Então:

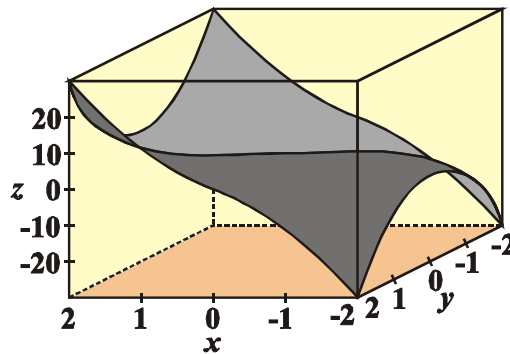
- (i) Se $H(P_0) > 0$, $w=f(P)$ admite extremos em P_0 e:
 - (a) Tem um valor máximo se $\frac{\partial^2 f(P_0)}{\partial x^2} < 0$;
 - (b) Tem um valor mínimo se $\frac{\partial^2 f(P_0)}{\partial x^2} > 0$.
- (ii) Se $H(P_0) = 0$, nada se pode afirmar.
- (iii) Se $H(P_0) < 0$, $w=f(P)$ não admite extremos em P_0 , P_0 tem um ponto de sela.

Exercícios

46. Classificar os pontos críticos da função $f(x, y) = 3xy^2 + x^3 - 3x$.

Pontos críticos:

Resolução:



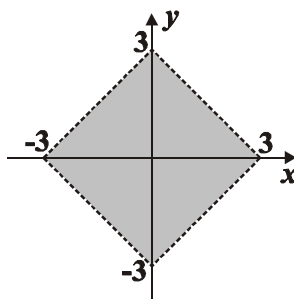
Resposta: $A(0,1)$ é PONTO DE SELA; $B(0,-1)$ é PONTO DE SELA; $C(1,0)$ é MÍNIMO LOCAL de f e $D(-1,0)$ é MÁXIMO LOCAL de f .

47. Considerando $f(x, y) = x^2 + x y + y^2 + \frac{3}{x} + \frac{3}{y} + 5$, verifique se o ponto $(1, 1)$ é ponto crítico, classificando-o.

Resolução:

Resposta: $(1, 1)$ é MÍNIMO LOCAL de f .

48. Seja $f(x, y) = 2x^3 + 2y^3 - 6x - 6y$. Analisar os pontos de máximo e mínimo de f no conjunto aberto A da figura a seguir.



Resolução:

Resposta: f possui um ponto de mínimo e um de máximo local. São eles: $(1,1)$ e $(-1,-1)$.

6.5.1 Teorema de Weierstrass

Seja $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ com $w = f(x, y)$ uma função contínua no conjunto fechado e limitado A . Então existem P_1 e $P_2 \in A$ tais que

$$f(P_1) \leq f(P) \leq f(P_2)$$

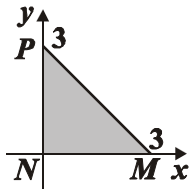
qualquer que seja $P \in A$.

Observação

Esse teorema garante a existência do ponto de máximo e do ponto de mínimo de uma função contínua com domínio fechado e limitado.

Exercício

49. Tome $f(x, y) = 2x^3 + 2y^3 - 6x - 6y$ do exercício anterior. Determinar o valor máximo e o valor mínimo de f no conjunto B delimitado pelo triângulo MNP da figura a seguir.

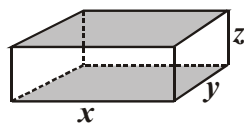


Resolução:

Resposta: O valor de mínimo de f é $f(1,1) = -8$. e o valor de máximo de f é $f(0,3) = f(3,0) = 36$.

6.5.2 Aplicações: Exercícios

50. Quais as dimensões de uma caixa retangular sem tampa com volume $4 m^3$ e com a menor área de superfície possível?



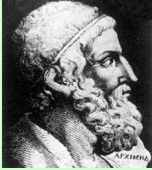







Resolução:

Resposta: $(x, y, z) = (2, 2, 1)$.

7 Integrais Duplas e Triplas

7.1 Introdução

Alguns personagens importantes que contribuíram para o cálculo diferencial e integral:

| | | | | | |
|--|---|--|--|---|---|
|  Arquimedes de Siracusa (287 - 212 a.C.) |  Johann Kepler (1571 - 1630) |  Bonaventura Francesco Cavalieri (1598 - 1647) | SEM FOTO Pierre de Fermat (1601-1665) |  Isaac Barrow (1630 - 1677) |  Isaac Newton, Sir (1642-1727) |
|  Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716) |  Jacques Bernoulli (1654 - 1705) |  Johann Bernoulli (1667 - 1748) |  Carl Fridrich Gauss (1777 - 1855) |  Augustin Louis Cauchy (1789-1857) |  Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 - 1866) |

O Cálculo pode ser dividido em duas partes: uma relacionada às derivadas ou **Cálculo Diferencial** e outra parte relacionada às integrais, ou **Cálculo Integral**.

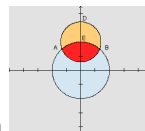
Os primeiros problemas que apareceram na História relacionados com as integrais são os problemas de **quadratura**. Um dos problemas mais antigos enfrentados pelos gregos foi o da medição de superfícies a fim de encontrar suas áreas. Quando os antigos geômetras começaram a estudar as áreas de figuras planas, eles as relacionavam com a área do quadrado, por ser essa a figura plana mais simples. Assim, buscavam encontrar um quadrado que tivesse área igual à da figura em questão.

A palavra **quadratura** é um termo antigo que se tornou sinônimo do processo de determinar áreas.

Quadraturas que fascinavam os geômetras eram as de figuras curvilíneas, como o círculo, ou figuras limitadas por arcos de outras curvas. As **lúnulas**¹, regiões que se assemelham com a lua no seu quarto-crescente, foram estudadas por **Hipócrates de Chios**, 440 a.C., que realizou as primeiras quadraturas da História. **Antifon**, por volta de 430 a.C., procurou encontrar a quadratura do círculo através de uma seqüência infinita de polígonos regulares inscritos: primeiro um quadrado, depois um octógono, em seguida um hexadecágono, e assim por diante. Havia, entretanto, um problema: essa seqüência nunca poderia ser concluída. Apesar disso, essa foi uma idéia genial que deu origem ao método da exaustão.

Nesse contexto, uma das questões mais importantes, e que se constituiu numa das maiores contribuições gregas para o Cálculo, surgiu por volta do ano 225 a.C. Trata-se de um teorema de Arquimedes para a quadratura da parábola.

Arquimedes descobriu que a área da região limitada por uma parábola cortada por uma corda qualquer, é igual a $4/3$ da área do triângulo que tem a mesma altura e que tem a corda como base. Esse cálculo pode ser encontrado no livro do Simmons, volume 2.



¹ Quando duas circunferências se interceptam como na figura a região em forma de lua crescente limitada pelos arcos ADB e AEB, é denominada lúnula.

Arquimedes gerou também uma soma com infinitos termos, mas ele conseguiu provar rigorosamente o seu resultado, evitando, com o método da exaustão, a dificuldade com a quantidade infinita de parcelas. Este é o primeiro exemplo conhecido de soma infinita que foi resolvido.

Outra contribuição de Arquimedes foi a utilização do método da exaustão para encontrar a área do círculo, obtendo uma das primeiras aproximações para o número π .

Outras "integrações" foram realizadas por Arquimedes a fim de encontrar o volume e a área da superfície esférica, o volume e a área da superfície do cone, a área da região limitada por uma elipse, o volume de qualquer secção de um parabolóide de revolução e o volume de um hiperbolóide de revolução. Em seus cálculos, Arquimedes encontrava somas com um número infinito de parcelas. O argumento utilizado era a dupla "*reductio ad absurdum*" para "escapar" da situação incômoda. Basicamente, se não podia ser nem maior, nem menor, tinha que ser igual.

A contribuição seguinte para o Cálculo Integral apareceu somente ao final do século XVI quando a Mecânica levou vários matemáticos a examinar problemas relacionados com o centro de gravidade. Em 1606, em Roma, Luca Valerio publicou "*De quadratura parabolae*" onde utilizou o mesmo método grego para resolver problemas de cálculo de áreas desse tipo.

Kepler, em seu trabalho sobre o movimento dos planetas, teve que encontrar as áreas de vários setores de uma região elíptica. O método de Kepler consistia em pensar na superfície como a soma de linhas - método este que, na prática, apresentava muita imprecisão. Analogamente, para calcular volumes de sólidos, pensava na soma de fatias planas. Desse modo, calculou os volumes de muitos sólidos tridimensionais formados pela revolução de uma região bidimensional ao redor de um eixo. Para o cálculo de cada um desses volumes, Kepler subdividia o sólido em várias fatias, chamadas infinitésimos, e a soma desses infinitésimos se aproximava do volume desejado.

Os próximos matemáticos que tiveram grande contribuição para o nascimento do Cálculo Integral foram Fermat e Cavalieri. Em sua obra mais conhecida, "*Geometria indivisibilibus continuorum nova*", Cavalieri desenvolveu a idéia de Kepler sobre quantidades infinitamente pequenas. Aparentemente, Cavalieri pensou na área como uma soma infinita de componentes ou segmentos "indivisíveis". Ele mostrou, usando os seus métodos, o que hoje

em dia escrevemos:
$$\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

Todo o processo geométrico desenvolvido por Cavalieri foi então aritmetizado por Wallis. Em 1655, em seu trabalho "*Arithmetica infinitorum*", Wallis desenvolveu princípios de indução e interpolação que o levaram a encontrar diversos resultados importantes, entre eles, a antecipação de parte do trabalho de Euler sobre a função gama.

Fermat desenvolveu uma técnica para achar a área sob cada uma das, então chamadas, "parábolas maiores": curvas do tipo $y=kx^n$, onde $k > 0$ é constante e $n = 2, 3, 4$, etc. Empregou então uma série geométrica para fazer o mesmo para cada uma das curvas do tipo $y=kx^n$, onde $k > 0$ e $n = -2, -3, -4$, etc. Por volta de 1640, a fórmula geral da integral das parábolas maiores era conhecida por Fermat, Blaise Pascal, Descartes, Torricelli e outros.

O problema do movimento estava sendo estudado desde a época de Galileu. Tanto Torricelli como Barrow consideraram o problema do movimento com velocidades variadas. A derivada da distância era a velocidade e a operação inversa, partindo da velocidade, levava à distância. A partir desse problema envolvendo movimento, a idéia de operação inversa da derivada desenvolveu-se naturalmente e a idéia de que a integral e a derivada eram processos inversos era familiar a Barrow. Embora Barrow nunca tenha anunciado formalmente o Teorema Fundamental do Cálculo, estava trabalhando em direção ao seu resultado; foi Newton, entretanto, quem, continuando na mesma direção, formulou o teorema.

Newton continuou os trabalhos de Barrow e Galileu sobre o estudo do movimento dos corpos e desenvolveu o Cálculo aproximadamente dez anos antes de Leibniz. Ele desenvolveu os métodos das *fluxions* (derivação) e *fluents* (integração) e utilizou-os na construção da

mecânica clássica. Para Newton, a integração consistia em achar *fluents* para um dado *fluxion* considerando, desta maneira, a integração como inversa da derivação. Com efeito, Newton sabia que a derivada da velocidade, por exemplo, era a aceleração e a integral da aceleração era a velocidade.

Newton representava as integrais por um acento grave acima da letra em questão, por exemplo, a integral de y era representada por \dot{y} .

Leibniz, diferentemente de Newton, usava a integração como uma soma, de uma maneira bastante parecida à de Cavalieri. Daí vem o símbolo \int (um 's' longo) para representar *soma*.

Ambos desenvolveram o Cálculo Integral separadamente, entretanto Newton via o Cálculo como geométrico, enquanto Leibniz o via mais como analítico.

Principalmente como consequência do Teorema Fundamental do Cálculo de Newton, as integrais foram simplesmente vistas como derivadas "reversas". Na mesma época da publicação das tabelas de integrais de Newton, Johann Bernoulli descobriu processos sistemáticos para integrar todas as funções racionais, que é chamado método das frações parciais. Essas idéias foram resumidas por Leonard Euler, na sua obra sobre integrais.

Após o estabelecimento do Cálculo, Euler daria continuidade ao estudo de funções - ainda prematuro na época - juntamente com Cauchy, Gauss e Riemann. Foi Euler, entretanto, quem reuniu todo o conhecimento até então desenvolvido e criou os fundamentos da Análise.

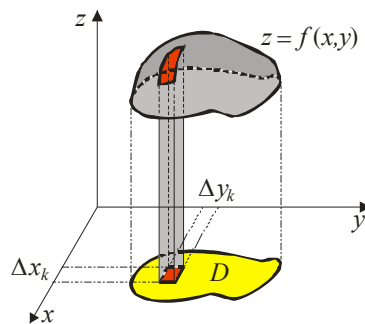
Hoje em dia o Cálculo Integral é largamente utilizado em várias áreas do conhecimento humano e aplicado para a solução de problemas não só de Matemática, mas de Física, Astronomia, Economia, Engenharia, Medicina, Química, por exemplo.

7.2 Integrais Duplas

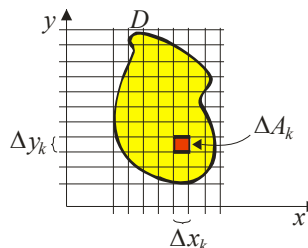
Integral dupla é uma extensão natural do conceito de integral definida para as funções de duas variáveis. Serão utilizadas para analisar diversas situações envolvendo cálculo de áreas e volumes, determinação de grandezas físicas e outros.

Definição

Considere uma função $z = f(x, y)$ contínua e definida numa região fechada e limitada D do plano xy .



Traçando retas paralelas aos eixos x e y , recobrimos a região D por pequenos retângulos.



Considere somente os retângulos R_k que estão totalmente contidos em D , numerando-os de 1 a n .

Em cada retângulo R_k , tome o ponto $P_k = (x_k, y_k)$ e forme a soma

$$\text{SOMA DE RIEMANN: } \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta A_k,$$

onde $\Delta A_k = \Delta x_k \cdot \Delta y_k$ é a área do retângulo R_k .

Traçando-se mais retas paralelas aos eixos x e y , os retângulos ficam cada vez menores.

Toma-se mais retas tal que a diagonal máxima dos retângulos R_k tende a zero quando n tende ao infinito.

Então, se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta A_k$$

existe, ele é chamado INTEGRAL DUPLA DE $f(x_k, y_k) \Delta A_k$ sobre a região D .

Denota-se por:

$$\iint_D f(x, y) dA \text{ ou } \iint_D f(x, y) dx dy.$$

7.2.1 Interpretação Geométrica

Se $f(x, y) \geq 0$, $f(x_k, y_k) \Delta A_k$ representa o volume de um prisma reto, cuja base é o retângulo R_k e cuja altura é $f(x_k, y_k)$. A soma de Riemann $\sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta A_k$ é a aproximação do volume limitado abaixo da região z e acima de D .

Assim, se $z = f(x, y) \geq 0$,

$$\iint_D f(x, y) dx dy$$

é o VOLUME DO SÓLIDO delimitado superiormente pelo gráfico de $z = f(x, y)$, inferiormente pela região D .

7.2.2 Área da Região D

Se $f(x, y) = 1 \forall P(x, y) \in D$, então, $V = 1 \cdot \text{área} D$.

Logo:

$$\iint_D 1 dA = \text{Área da Região } D.$$

7.2.3 Propriedades das Integrais Duplas

- 1. Múltiplo constante

$$\iint_D k f(x, y) dA = k \iint_D f(x, y) dA \quad (\text{para todo número } k)$$

- 2. Soma e Diferença

$$\iint_D [f(x, y) \pm g(x, y)] dA = \iint_D f(x, y) dA \pm \iint_D g(x, y) dA$$

- 3. Dominação

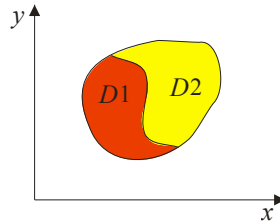
- (a) $\iint_D f(x, y) dA \geq 0$ se $f(x, y) \geq 0$ em D

- (b) $\iint_D f(x, y) dA \geq \iint_D g(x, y) dA$ se $f(x, y) \geq g(x, y)$ em D

- 4. Aditividade

$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_{D_1} f(x, y) dA + \iint_{D_2} f(x, y) dA$$

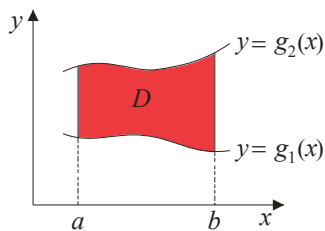
se D for a união de duas sub-regiões não sobrepostas D_1 e D_2 .



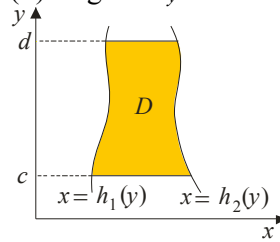
7.3 Cálculo de Integrais Duplas

7.3.1 Teorema para o Cálculo de Integrais Duplas

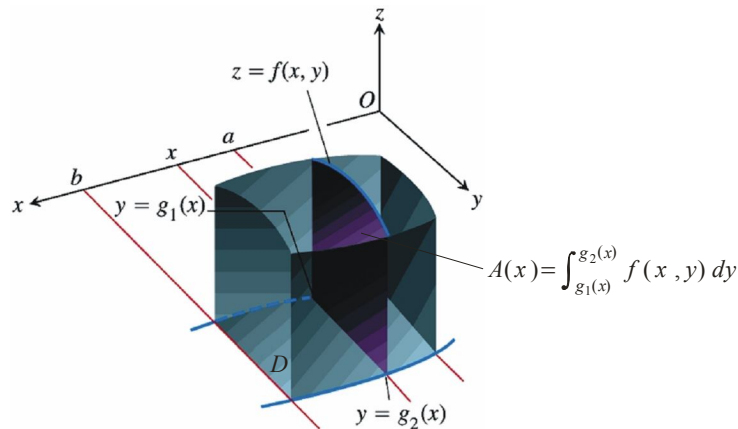
(i) Região D_x :



(ii) Região D_y :



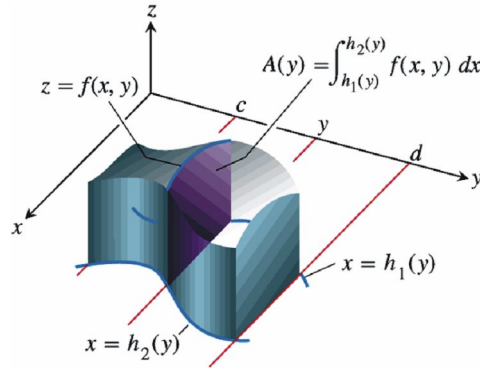
- (i) Seja D a região D_x da figura anterior. Se f é contínua em D , então:



$$\iint_D f(x, y) dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx$$

(Teorema 1)

- (ii) Seja D a região D_y da figura anterior. Se f é contínua em D , então:



$$\iint_D f(x, y) dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy \quad \text{(Teorema 2)}$$

7.3.2 Definição: Integrais Iteradas

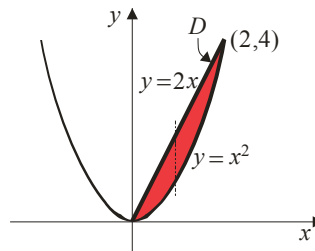
- (i) $\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right] dx$
- (ii) $\int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx \right] dy$

Exercícios

1. Seja D a região do plano xy delimitada pelos gráficos de $y = x^2$ e $y = 2x$.

Calcule $\iint_D (x^3 + 4y) dA$ aplicando: (a) Teorema 1; (b) Teorema 2.

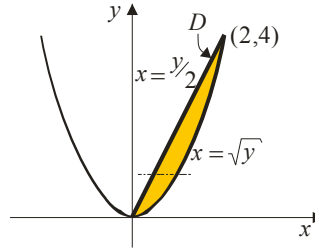
- (a) Teorema 1



Resolução:

Resposta: $\frac{32}{3}$

- (b) Teorema 2

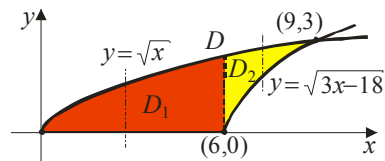


Resolução:

Resposta: $\frac{32}{3}$

2. Seja D a região delimitada pelos gráficos das equações $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{3x - 18}$ e $y = 0$. Se f é uma função contínua arbitrária em D , expresse a integral dupla $\iint_D f(x, y) dA$ em termos de integrais iteradas utilizando apenas: (a) Teorema 1; (b) Teorema 2.

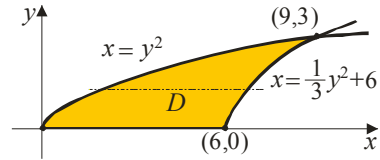
- (a) Teorema 1



Resolução:

Resposta:

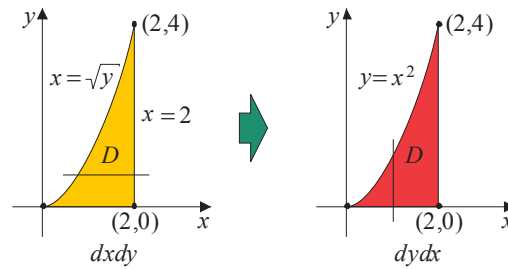
- (b) Teorema 2



Resolução:

Resposta:

3. Dada $\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 y \cos x^5 dx dy$, inverta a ordem de integração e calcule a integral resultante.

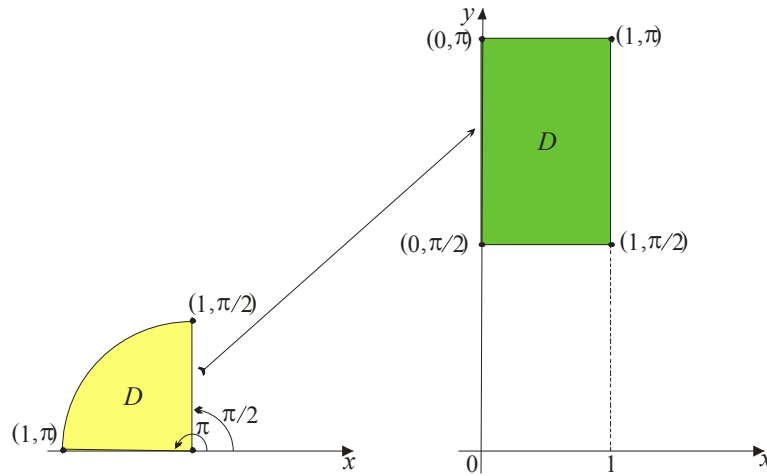


Resolução:

Resposta: 0,055

4. Calcular $I = \iint_D y \sin xy \, dx dy$,

onde D é o retângulo de vértices $(0, \frac{\pi}{2})$, $(1, \frac{\pi}{2})$, $(1, \pi)$ e $(0, \pi)$.



Resolução:

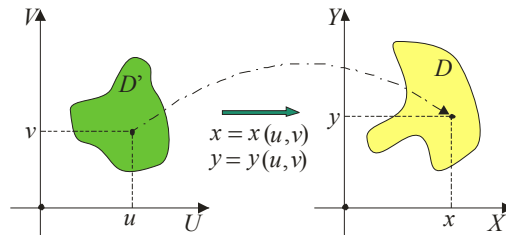
Resposta: $1 + \frac{\pi}{2}$

7.4 Mudança de Variáveis em Integrais Duplas

Através de uma mudança de variáveis

$$x = x(u, v) \text{ e } y = y(u, v) \tag{1}$$

uma integral dupla sobre uma região D do plano xy pode ser transformada numa integral dupla sobre uma região D' do plano uv .



A correspondência entre as regiões D' e D é BIJETORA, e podemos retornar de D para D' através da transformação inversa

$$u = u(x, y) \text{ e } v = v(x, y). \tag{2}$$

Considerando que as funções em (1) e (2) são contínuas, com derivadas parciais contínuas em D' e D , respectivamente, temos

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv \quad (3)$$

onde $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ é o determinante jacobiano de x e y em relação a u e v , dado por

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

A fórmula (3) é válida se:

- (i) f é contínua;
- (ii) as regiões D e D' são formadas por um número finito de sub-regiões do tipo D_x ou D_y ;
- (iii) o jacobiano $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0$ em D' ou se anula num número finito de pontos de D' .

7.5 Coordenadas Polares

A transformação que leva pontos (r, θ) do plano $r\theta$ a pontos (x, y) do plano xy é dada por

$$x = x(r, \theta) = r \cos \theta \text{ e } y = y(r, \theta) = r \sin \theta \quad (4)$$

e seu jacobiano é dado por

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r.$$

Portanto, a fórmula (3) pode ser expressa por:

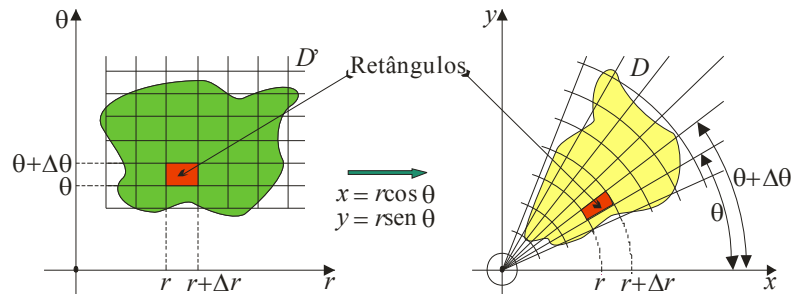
$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta. \quad (5)$$

7.5.1 Obtenção da fórmula

Para que (4) seja bijetora, considera-se $r\theta$ para os quais r e θ satisfazem:

$$r \geq 0 \text{ e } 0 \leq \theta < 2\pi \text{ ou } r \geq 0 \text{ e } -\pi < \theta \leq \pi.$$

Para os cálculos, pode-se considerar \leq como sendo $<$.

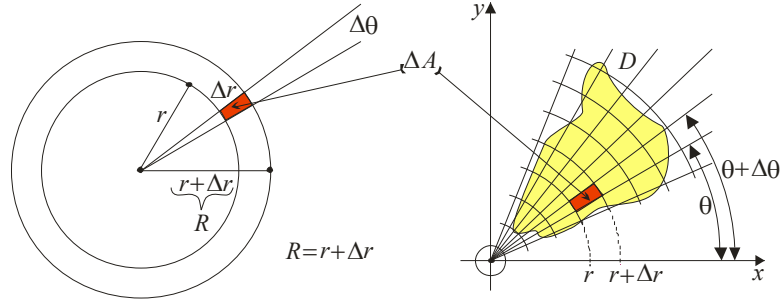


Existe uma correspondência entre $\Delta A'$ e ΔA , que veremos a seguir:

7.5.2 Área $\Delta A'$ do retângulo em D'

$$\Delta A' = \Delta r \cdot \Delta \theta$$

7.5.3 Área ΔA do retângulo polar em D



Área de um setor circular: $A = \frac{1}{2} r^2 \theta$

ΔA é a diferença entre dois setores circulares de mesmo ângulo $\Delta \theta$ e raios R e r .

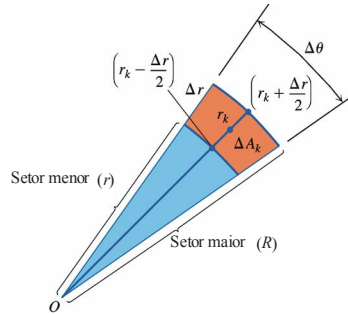
$$\Delta A = \frac{1}{2} R^2 \cdot \Delta \theta - \frac{1}{2} r^2 \cdot \Delta \theta$$

$$\Delta A = \frac{1}{2} (R^2 - r^2) \cdot \Delta \theta \quad \Rightarrow R = r + \Delta r$$

$$\Delta A = \frac{1}{2} ((r + \Delta r)^2 - r^2) \cdot \Delta \theta = \frac{1}{2} (r^2 + 2r\Delta r + \Delta r^2 - r^2) \cdot \Delta \theta = \frac{1}{2} (2r\Delta r + \Delta r^2) \cdot \Delta \theta$$

$$\Delta A = \frac{1}{2} (2r + \Delta r) \cdot \Delta r \Delta \theta = \frac{r + (r + \Delta r)}{2} \cdot \Delta r \Delta \theta = \frac{r + R}{2} \cdot \Delta r \Delta \theta \quad \Rightarrow r_k = \frac{r + R}{2}$$

$$\Delta A = r_k \cdot \Delta r \Delta \theta = r_k \cdot \Delta A'$$



$$\Delta A = r_k \Delta A'$$

7.5.4 Integral dupla em D'

Assim, obtemos o jacobiano r_k da fórmula (5).

Enumerando os retângulos polares e 1 a n , tome um ponto arbitrário

$$(x_k, y_k)$$

no k -ésimo retângulo. Este ponto pode ser representado por

$$(r_k \cos \theta_k, r_k \sin \theta_k)$$

que tem representação (r_k, θ_k) referente à região correspondente em D' . Assim, a soma de Riemann

$$\sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta A_k$$

é equivalente a

$$\sum_{k=1}^n f(r_k \cos \theta_k, r_k \sin \theta_k) r_k \Delta A'_k$$

onde $\Delta A'_k = \Delta r_k \cdot \Delta \theta_k$ é a área do k -ésimo retângulo em D' .

Assim, se tomarmos limite com $n \rightarrow \infty$ com o máximo das diagonais dos n retângulos tendendo a zero, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(r_k \cos \theta_k, r_k \sin \theta_k) r_k \Delta A'_k$$

que equivale a integral

$$\iint_{D'} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

dada pela fórmula (5).

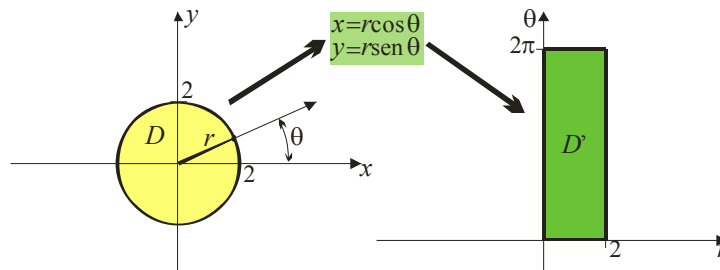
Exercícios

5. Calcular $I = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, sendo D o círculo de centro na origem e raio 2.

Identificar D' em $r\theta$, com correspondência ao D em xy .

Contorno da região D : $x^2 + y^2 = 4$.

$$D': \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 2 \end{cases}$$



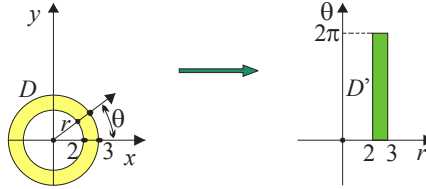
Resolução:

Resposta: $\frac{16\pi}{3}$

6. Calcular $I = \iint_D e^{x^2+y^2} dx dy$, onde D é a região do plano xy delimitada entre $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + y^2 = 9$.

Região D : $x^2 + y^2 \geq 4 \cap x^2 + y^2 \leq 9$

Região D' : $\begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 2 \leq r \leq 3 \end{cases}$



Resolução:

Resposta: $(e^9 - e^4)\pi$

7.6 Cálculo de Volumes (Aplicações)

Para $f(x, y) \geq 0$, a integral

$$V = \iint_D f(x, y) dA \tag{6}$$

nos dá o volume do sólido delimitado superiormente pelo gráfico de $z = f(x, y)$, inferiormente pela região D e lateralmente pelo cilindro vertical cuja base é o contorno de D .

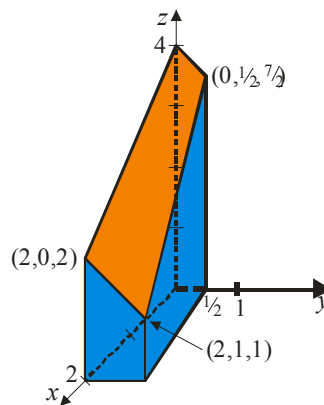
Exercícios

7. Calcular o volume do sólido acima do plano xy delimitado por $z = 4 - 2x^2 - 2y^2$.

Resolução:

Resposta: 4π u.v.

8. Calcular o volume do sólido delimitado superiormente pelo gráfico de $z = 4 - x - y$, inferiormente pela região delimitada por $x = 2$, $x = 0$, $y = 0$ e $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$ e lateralmente pelo cilindro vertical cuja base é o contorno de D .



Resolução:

Resposta: $V = \frac{15}{4}$ unidades de volume.

7.7 Cálculo de Áreas de Regiões Planas

Fazendo $f(x, y) = 1$, a área da região de integração D é dada por:

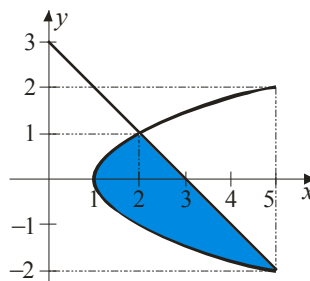
$$A = \iint_D dA \quad (7)$$

Exercício

9. Calcular a área da região D delimitada por $x = y^2 + 1$ e $x + y = 3$. Calcular pelas duas formas:

- D_x (Teorema 1)
- D_y (Teorema 2)

Por (7), $A = \iint_D dA$



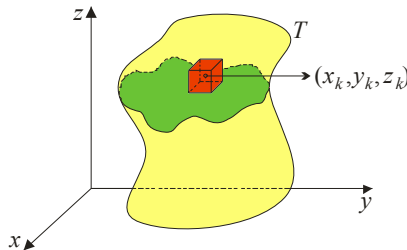
Resolução:

Resposta: $\frac{9}{2}$ u.a. (unidades de área)

7.8 Integrais Triplas

Definição

Seja $w = f(x, y, z)$ uma função definida e contínua numa região fechada e limitada T do espaço. Subdividimos T em pequenas sub-regiões traçando planos paralelos aos planos coordenados.



Numeramos os paralelepípedos no interior de T de 1 até n . Em cada um dos pequenos paralelepípedos T_k , escolhemos um ponto arbitrário (x_k, y_k, z_k) .

Formamos a soma $\sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z_k)\Delta V_k$, onde ΔV_k é o volume do paralelepípedo T_k .

Faz-se isso de maneira arbitrária, mas de tal forma que a maior aresta dos paralelepípedos T_k tende a zero quando $n \rightarrow \infty$.

Se existir $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z_k)\Delta V_k$, ele é chamado:

INTEGRAL TRIPLA da função $f(x, y, z)$ sobre a região T e representamos por

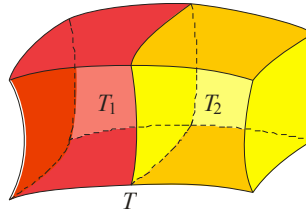
$$\iiint_T f(x, y, z) dV \text{ ou } \iiint_T f(x, y, z) dx dy dz$$

Propriedades

De forma análoga a integrais duplas, temos:

- 1. $\iiint_T kf dV = k \iiint_T f dV$;

- 2. $\iiint_T (f_1 \pm f_2) dV = \iiint_T f_1 dV \pm \iiint_T f_2 dV;$
- 3. $\iiint_T f dV = \iiint_{T_1} f dV + \iiint_{T_2} f dV,$ onde $T = T_1 \cup T_2,$ como mostra a figura a seguir.

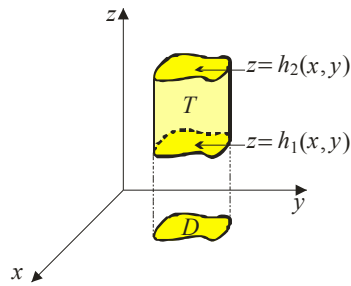


7.9 Cálculo de Integrais Triplas

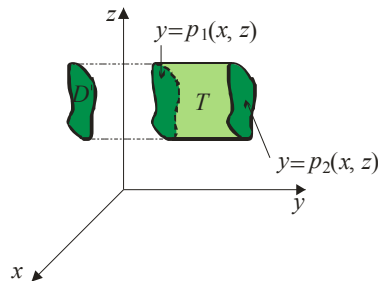
Através das três situações seguintes, o cálculo da integral tripla será reduzido, inicialmente, a resolução de uma integral dupla.

Serão apresentados três casos: (i), (ii) e (iii).

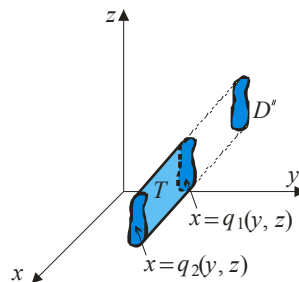
- (i) Domínio D :



- (ii) Domínio D' :



- (iii) Domínio D'' :



- (i) A região T é delimitada inferiormente pelo gráfico $z = h_1(x, y)$ e superiormente pelo gráfico $z = h_2(x, y),$ onde h_1 e h_2 são funções contínuas sobre a região D do plano $xy.$

$$\iiint_T f(x, y, z) dV = \iint_D \left[\int_{h_1(x, y)}^{h_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dx dy \quad (8)$$

Logo, se, por exemplo, a região D for do tipo D_x :

$$D: \begin{cases} g_1(x) \leq y \leq g_2(x) \\ a \leq x \leq b \end{cases}$$

a integral tripla será dada pela seguinte integral iterada tripla:

$$\iiint_T f(x, y, z) dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x, y, z) dz dy dx.$$

- (ii) A região T é delimitada à esquerda por $y = p_1(x, z)$ e a direita por $y = p_2(x, z)$, onde p_1 e p_2 são funções contínuas sobre a região D' do plano xz .

$$\iiint_T f(x, y, z) dV = \iint_{D'} \left[\int_{p_1(x,z)}^{p_2(x,z)} f(x, y, z) dy \right] dx dz \quad (9)$$

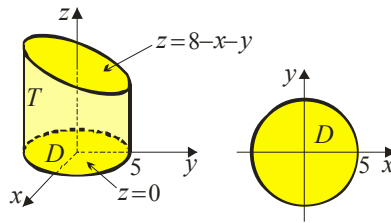
- (ii) A região T é delimitada na parte de traz por $x = q_1(y, z)$ e na frente por $x = q_2(y, z)$, onde q_1 e q_2 são funções contínuas sobre a região D'' do plano yz .

$$\iiint_T f(x, y, z) dV = \iint_{D''} \left[\int_{q_1(y,z)}^{q_2(y,z)} f(x, y, z) dx \right] dy dz \quad (10)$$

Exercícios

10. Calcular $I = \iiint_T x dV$, onde T é o sólido delimitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 25$,

pelo $x + y + z = 8$ e pelo plano xy .



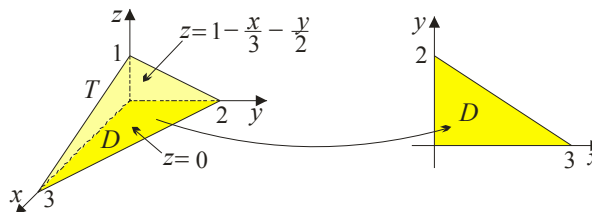
Resolução:

Resposta: $I = -\frac{625}{4}\pi$

11. Calcular $I = \iiint_T y dV$, onde T é a região delimitada pelos planos coordenados e pelo plano

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} + z = 1.$$

T é o tetraedro representado a seguir:



Neste caso, T se enquadra em qualquer um dos casos: (i), (ii) ou (iii). No desenho, é sugerida a utilização de (i).

Resolução:

Resposta: $I = \frac{1}{2}$

7.10 Mudança de Variáveis em Integrais Triplas

Seja I dada por (10):

$$I = \iiint_T f(x, y, z) dx dy dz \tag{10}$$

Induzindo novas variáveis de integração u, v, w com $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$ e $z = z(u, v, w)$, a integral (10) fica:

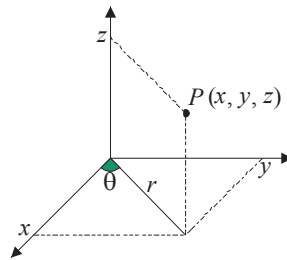
$$I = \iiint_{T'} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw \tag{11}$$

onde T' é a correspondente região no espaço u, v, w e $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$ é o determinante jacobiano de x, y e z em relação a u, v e w .

7.11 Integrais Triplas em Coordenadas Cilíndricas

A relação entre as coordenadas cilíndricas e cartesianas é dada pelas equações:

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta \qquad z = z$$



O jacobiano de x, y, z em relação às novas variáveis r, θ e z é:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

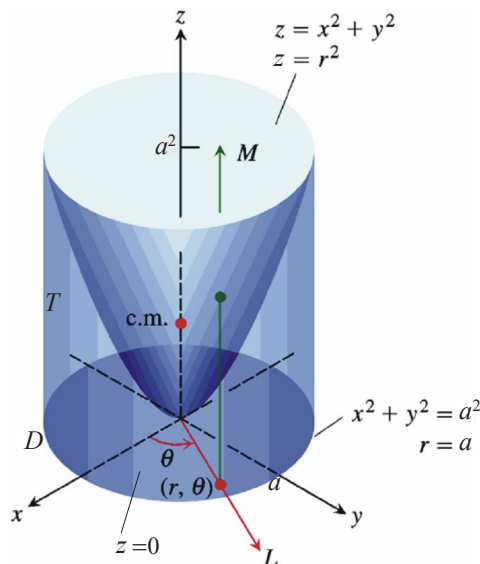
Assim, usando (11), vem:

$$\iiint_T f(x,y,z)dV = \iiint_{T'} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)rdrd\theta dz \qquad (12)$$

onde T' é a região T descrita em coordenadas cilíndricas.

Exercício

12. Calcular $I = \iiint_T (x^2 + y^2)dV$, onde T é a região delimitada pelo plano xy , pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$ e pelo cilindro $x^2 + y^2 = a^2$.



A região T é limitada inferiormente por $z = 0$ e superiormente por $z = x^2 + y^2$ que, em coordenadas cilíndricas, tem equação $z = r^2$.

Observação: Levando-se em conta que a região T se enquadra no caso (i), pode-se escrever a equação (12) representada pela (13).

$$\iint_{D'} \left[\int_{h_1(r,\theta)}^{h_2(r,\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) dz \right] r dr d\theta \quad (13)$$

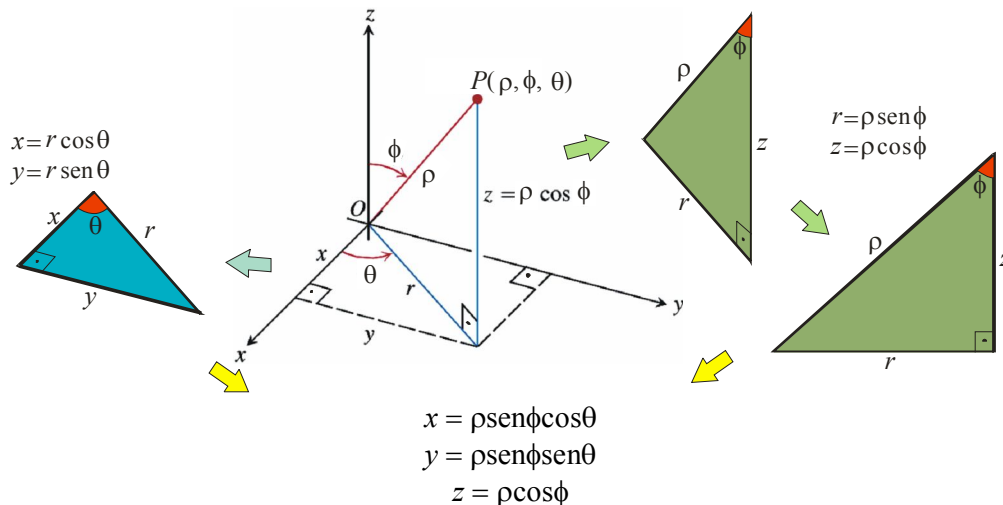
- Onde h_1 e h_2 delimitam T inferior e superiormente.
- D' é a projeção de T sobre o plano xy descrita em coordenadas polares.

Resolução:

Resposta: $I = \frac{a^6 \pi}{3}$

7.12 Integrais Triplas em Coordenadas Esféricas

A relação entre as coordenadas esféricas e cartesianas é desenvolvida da seguinte forma, conforme figura a seguir:



O jacobiano de x, y, z em relação às novas variáveis r, θ e ϕ é:

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \phi)} = \begin{vmatrix} \sin \phi \cos \theta & -\rho \sin \phi \sin \theta & \rho \cos \phi \cos \theta \\ \sin \phi \sin \theta & \rho \sin \phi \cos \theta & \rho \cos \phi \sin \theta \\ \cos \phi & 0 & -\rho \sin \phi \end{vmatrix} = \rho^2 \sin \phi$$

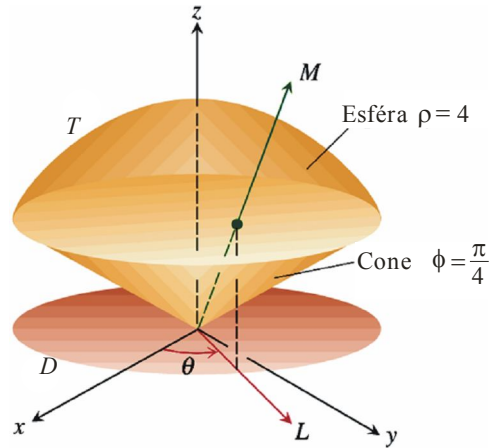
Assim, usando (11), vem:

$$\iiint_T f(x, y, z) dV = \iiint_{T'} f(\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi d\rho d\theta d\phi$$

onde T' é a região de integração T descrita em coordenadas esféricas.

Exercício

13. Calcular $I = \iiint_T z dV$, onde T é a região limitada superiormente pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ e inferiormente pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

**Resolução:****Resposta:** $I = 32\pi$

7.13 Aplicações Físicas da Integral Dupla

Usando as integrais duplas, podemos encontrar a massa, o centro de massa e o momento de inércia de uma lâmina plana não homogênea, com a forma de uma região R e com densidade de área em um ponto (x, y) de R dada pela função contínua $\rho = \rho(x, y)$.

A massa total da lâmina é definida por:

$$M = \iint_R \rho(x, y) dA$$

Além disso, o momento de massa em relação ao eixo x é dado por:

$$M_x = \iint_R y\rho(x, y) dA$$

Analogamente, o momento de massa em relação ao eixo y é dado por:

$$M_y = \iint_R x\rho(x, y) dA$$

O centro de massa, denotado por (\bar{x}, \bar{y}) é definido por:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} \quad \text{e} \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M}$$

O momento de inércia em relação ao eixo x é:

$$I_x = \iint_R y^2 \rho(x, y) dA$$

O momento de inércia em relação ao eixo y é:

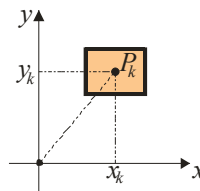
$$I_y = \iint_R x^2 \rho(x, y) dA$$

O momento de inércia polar é:

$$I_0 = \iint_R (x^2 + y^2) \rho(x, y) dA$$

Observação

Os valores y^2 , x^2 e $(x^2 + y^2)$ que aparecem nestas expressões são as “distâncias ao quadrado”, como mostra a figura a seguir:



No retângulo genérico R_k , temos o ponto $(x_k, y_k) \in R_k$, e:

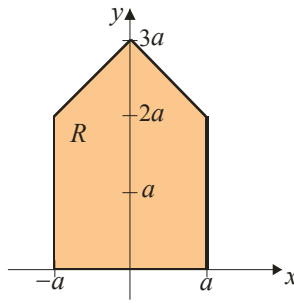
x_k^2 é o quadrado da distância de P_k ao eixo y .

y_k^2 é o quadrado da distância de P_k ao eixo x .

$x_k^2 + y_k^2$ é o quadrado da distância de P_k a origem.

Exercícios

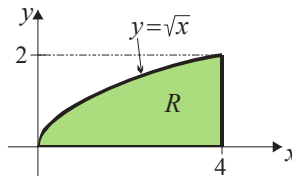
14. Determinar o centro de massa da chapa homogênea da figura abaixo.



Resolução:

Resposta: $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(0, \frac{19a}{15}\right)$

15. Calcular o momento de inércia em relação ao eixo dos y da chapa da figura a seguir, sabendo que a densidade de massa é igual a $xy \text{ Kg/m}^2$.



Resolução:

Resposta: $102,4 \text{ Kg/m}^2$

7.14 Aplicações Físicas da Integral Tripla

De maneira análoga ao que foi feito com as integrais duplas, vamos analisar o uso das integrais triplas para calcular a massa de um corpo, as coordenadas do seu centro de massa e o momento de inércia em relação a um eixo L .

Seja T um corpo ou sólido delimitado por uma região fechada e limitada do espaço.

Suponhamos que a densidade de massa por unidade de volume, em relação a um ponto (x, y, z) , é dado pela função $\delta = \delta(x, y, z)$, contínua em T .

A massa total do corpo é dada por:

$$M = \iiint_T \delta(x, y, z) dV$$

O momento de massa em relação ao plano xy do sólido T é dado por:

$$M_{xy} = \iiint_T z\delta(x, y, z) dV$$

Analogamente, o momento de massa em relação aos planos xz e yz são dados por:

$$M_{xz} = \iiint_T y\delta(x, y, z) dV \quad \text{e} \quad M_{yz} = \iiint_T x\delta(x, y, z) dV$$

Obtemos assim o centro de massa do sólido T , denotado por $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ definido por:

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{M} \quad \text{e} \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M}$$

Outro conceito importante é o de momento de inércia em relação a um eixo L . No caso de sólidos, temos que a distância de uma partícula, com massa concentrada em (x_k, y_k, z_k) , até os eixos coordenados é dada por:

- Eixo z : $d_{xy} = \sqrt{x_k^2 + y_k^2}$;
- Eixo y : $d_{xz} = \sqrt{x_k^2 + z_k^2}$;
- Eixo x : $d_{yz} = \sqrt{y_k^2 + z_k^2}$.

O momento de inércia em relação ao eixo z é:

$$I_z = \iiint_T (x^2 + y^2) \delta(x, y, z) dV$$

O momento de inércia em relação ao eixo x é:

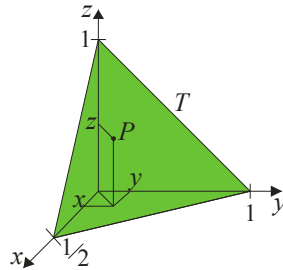
$$I_x = \iiint_T (y^2 + z^2) \delta(x, y, z) dV$$

O momento de inércia em relação ao eixo y é:

$$I_y = \iiint_T (x^2 + z^2) \delta(x, y, z) dV$$

Exercícios

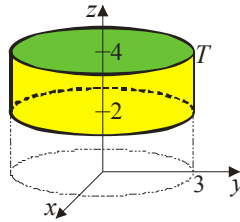
16. Calcular a massa e o centro de massa do sólido T , delimitado por $2x + y + z = 1$ e os planos coordenados, sabendo que a densidade de massa em $P(x, y, z)$ é proporcional a distância até o plano xy .



Resolução:

Resposta: $M = \frac{k}{48}$ unidades de massa. Centro de massa: $\left(\frac{1}{10}, \frac{1}{5}, \frac{6}{15}\right)$

17. Encontrar o momento de inércia em relação ao eixo z do sólido delimitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 9$ e pelos planos $z = 2$ e $z = 4$, sabendo que a densidade de massa é igual a $(x^2 + y^2) \text{ kg/m}^3$.



Resolução:

Resposta: $486\pi \text{ kg}\cdot\text{m}^2$

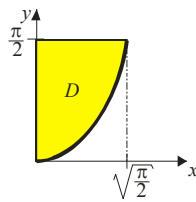
7.15 Exercícios

18. Calcular a integral $I = \int_0^1 \int_{4x}^4 e^{-y^2} dy dx$.

Resolução:

Resposta: $I = \frac{1}{8}(1 - e^{-16})$

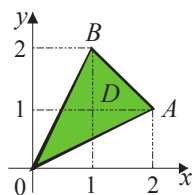
19. Calcular $I = \iint_D \sqrt{y} \sin(x\sqrt{y}) dA$ onde D é a região delimitada por $x = 0$, $y = \frac{\pi}{2}$ e $x = \sqrt{y}$.



Resolução:

Resposta: $I = \frac{\pi - 2}{2}$

20. Calcular $I = \iint_D xy \, dA$ onde D é o triângulo OAB da figura a seguir.



Resolução:

Resposta: $I = \frac{13}{8}$

21. Usando coordenadas polares, escrever na forma de uma integral iterada, a integral $I = \iint_D f(x, y) \, dx \, dy$ onde D é a região delimitada por $x^2 + y^2 - ay = 0$, $a > 0$.

Resolução:

Resposta: $I = \int_0^\pi \int_0^{a \sin \theta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r \, dr \, d\theta$

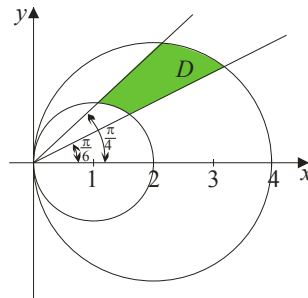
22. Calcular $I = \iint_D y \, dx \, dy$, sendo D a região delimitada por $x^2 + y^2 - ax = 0$, $a > 0$.

Resolução:

Resposta: $I = 0$

23. Calcular $I = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \, dx dy$, sendo D a região limitada pelas curvas:

$$x^2 + y^2 = 2x, \quad x^2 + y^2 = 4x, \quad y = x \quad \text{e} \quad y = \frac{\sqrt{3}}{3}x.$$

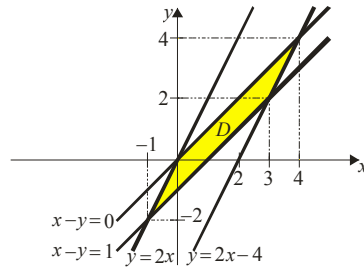


Resolução:

Resposta: $I = \frac{7}{9}(10\sqrt{2} - 11)$

24. Calcular $I = \iint_D (x - y) \, dx \, dy$, sendo D o paralelogramo limitado pelas retas:

$$x - y = 0, x - y = 1, y = 2x \text{ e } y = 2x - 4.$$



Resolução:

Resposta: $I = 2$

25. Calcular $I = \iint_D ((x-2)^2 + (y-2)^2) dx dy$, onde D é a região delimitada pela circunferência

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4.$$

Obs.: Aconselha-se o uso de duas transformações:

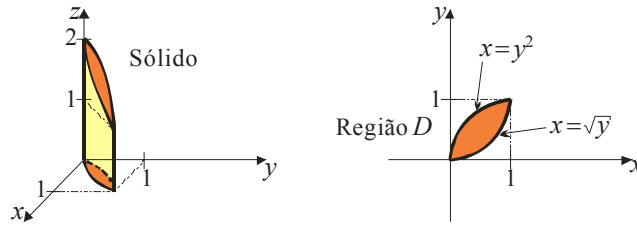
1^a: $u = x - 2$ e $v = y - 2$;

2^a: coordenadas polares.

Resolução:

Resposta: $I = 8\pi$

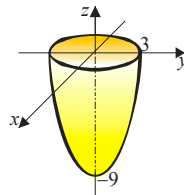
26. Calcular o volume do sólido no primeiro octante delimitado por $y + z = 2$ e pelo cilindro que contorna a região delimitada por $y = x^2$ e $x = y^2$.



Resolução:

Resposta: $V = \frac{31}{60}$ unidades de volume

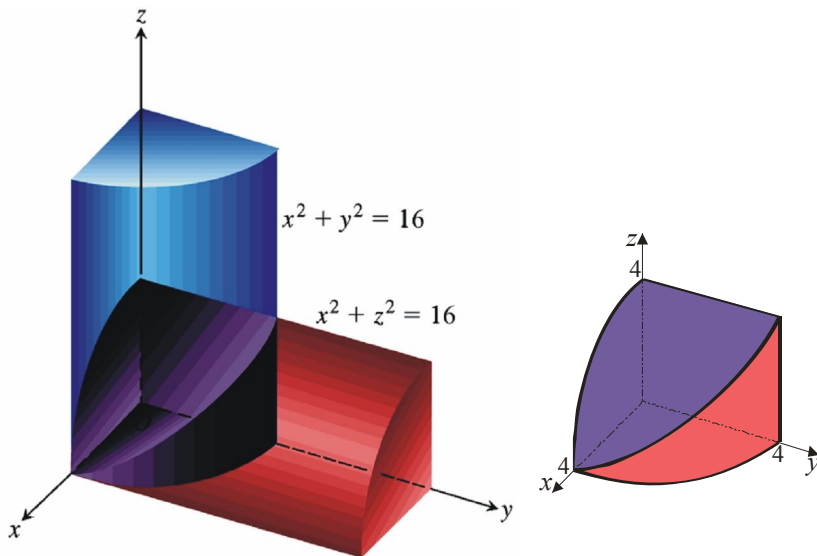
27. Calcular o volume do sólido abaixo do plano xy delimitado por $z = x^2 + y^2 - 9$.



Resolução:

Resposta: $V = \frac{81}{2}\pi$

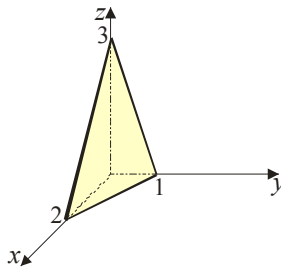
28. Calcular o volume do sólido no primeiro octante, delimitado pelos cilindros $x^2 + y^2 = 16$ e $x^2 + z^2 = 16$.



Resolução:

Resposta: $V = \frac{128}{3}$ unidades de volume

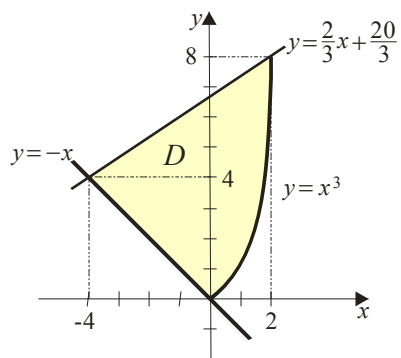
29. Calcular o volume do tetraedro dado na figura abaixo.



Resolução:

Resposta: $V = 1$ unidade de volume

30. Calcule a área da região delimitada por $y = x^3$, $y = -x$ e $y = \frac{2}{3}x + \frac{20}{3}$.



Resolução:

Resposta: $A = 24$ unidades de área

8 Formulário e Referências

8.1 Formulário de Derivadas e Integrais

DERIVADAS:

Tome u e v como funções em x .

Sejam $D_x u = u'$ e c uma constante.

- 1) $D_x c = 0$
- 2) $D_x (u + v) = u' + v'$
- 3) $D_x (uv) = u'v + uv'$
- 4) $D_x \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
- 5) $D_x [f(u)] = D_x f(u) \cdot u'$
- 6) $D_x u^n = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$
- 7) $D_x e^u = e^u \cdot u'$
- 8) $D_x a^u = a^u \cdot \ln a \cdot u'$
- 9) $D_x \ln|u| = \frac{1}{u} \cdot u'$
- 10) $D_x \log_a|u| = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$
- 11) $D_x \operatorname{senu} = \operatorname{cosu} \cdot u'$
- 12) $D_x \operatorname{cosu} = -\operatorname{senu} \cdot u'$
- 13) $D_x \operatorname{tgu} = \operatorname{sec}^2 u \cdot u'$
- 14) $D_x \operatorname{cotu} = -\operatorname{csc}^2 u \cdot u'$
- 15) $D_x \operatorname{secu} = \operatorname{secu} \cdot \operatorname{tgu} \cdot u'$
- 16) $D_x \operatorname{cscu} = -\operatorname{cscu} \cdot \operatorname{cotu} \cdot u'$
- 17) $D_x \operatorname{arcsenu} = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
- 18) $D_x \operatorname{arccosu} = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$
- 19) $D_x \operatorname{arctgu} = \frac{u'}{1+u^2}$
- 20) $D_x \operatorname{arcsecu} = \frac{u'}{u\sqrt{u^2-1}}$

INTEGRAIS:

- 1) $\int u dv = uv - \int v du$
- 2) $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c, (n \neq -1)$
- 3) $\int \frac{1}{u} du = \ln|u| + c$
- 4) $\int e^u du = e^u + c$
- 5) $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + c$
- 6) $\int \operatorname{senudu} = -\operatorname{cosu} + c$
- 7) $\int \operatorname{cosudu} = \operatorname{senu} + c$
- 8) $\int \operatorname{sec}^2 u du = \operatorname{tgu} + c$
- 9) $\int \operatorname{csc}^2 u du = -\operatorname{cotu} + c$
- 10) $\int (\operatorname{secu} \cdot \operatorname{tgu}) du = \operatorname{secu} + c$
- 11) $\int (\operatorname{cscu} \cdot \operatorname{cotu}) du = -\operatorname{cscu} + c$
- 12) $\int \operatorname{tgu} du = -\ln|\operatorname{cosu}| + c$
- 13) $\int \operatorname{cotu} du = \ln|\operatorname{senu}| + c$
- 14) $\int \operatorname{secu} du = \ln|\operatorname{secu} + \operatorname{tgu}| + c$
- 15) $\int \operatorname{cscu} du = \ln|\operatorname{cscu} - \operatorname{cotu}| + c$
- 16) $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{arcsen} \frac{u}{a} + c$
- 17) $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + c$
- 18) $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arcsec} \frac{u}{a} + c$
- 19) $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u+a}{u-a} \right| + c$
- 20) $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 - a^2} \right| + c$

8.2 Referências Bibliográficas

1. ANTON, H. **Cálculo – um novo horizonte**. Vol. 1 e 2. 6.ed. Porto Alegre: Bookman, 2000.
2. FINNEY, R.L., et al. **Cálculo – George B. Thomas**. Vol. 1 e 2. 10.ed. São Paulo: Addison Wesley, 2002.
3. GONÇALCES, M.B., et al. **Cálculo B**. São Paulo: MAKRON Books do Brasil Editora Ltda, 1999.
4. GUIDORIZZI, H.L. **Um Curso de Cálculo**. Vol.1 e 2. 5.ed. Rio de Janeiro: LTC, 2002.
5. LEITHOLD, L. **O Cálculo – com geometria analítica**. Vol. 1 e 2. 2.ed. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1981.
6. MUNEM, M. e FOULIS, D. **Cálculo**. Vol. 1 e 2. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1998.
7. MURRAY R. SPIEGEL. **Cálculo Avançado**. Coleção Schaum. Ed. McGraw-Hill do Brasil, Ltda. Rio de Janeiro – Brasil, 1971.
8. PISKOWNOV, N. **Cálculo Diferencial e Integral**. Vol.1 e 2. Porto: Lopes da Silva, 1992.
9. SHENK, A. **Cálculo e Geometria Analítica**. Vol.1 e 2. Rio de Janeiro: Campus, 1997.
10. SWOKOWSKI, E. W. **Cálculo com Geometria Analítica**. São Paulo: Editora Mc-Graw Hill do Brasil, 1983.
11. STEWART, J. **Cálculo**. Vol. I. 4.ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2003.