



UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE MATEMÁTICA
Campus Apucarana

Prof. MÁRCIO HIRAN SIMÕES

**Apostila de Cálculo Diferencial e Integral 3 -
Funções Vetoriais.**

Apucarana - PR

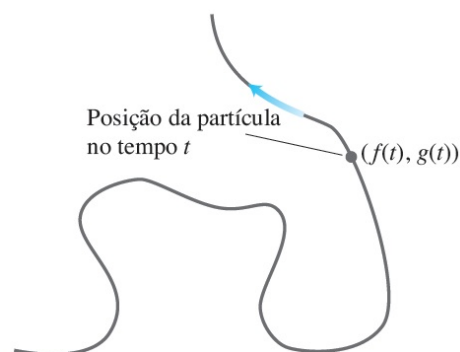
2017

Cálculo Vetorial

1.1. Funções Vetoriais e Equações Paramétricas no Plano

Suponha que uma partícula se movimenta de tal forma que as coordenadas (x, y) de sua posição em qualquer instante t sejam dadas pelas equações $x = f(t)$ e $y = g(t)$.

Então, para todo número t no domínio comum a f e g haverá um vetor $f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$, e os pontos finais das representações posicionais desses vetores traçarão uma curva C percorrida pela partícula. Isso nos leva a considerar uma função cujo domínio seja um conjunto de números reais e cuja imagem seja um conjunto de vetores. Tal função é chamada de *função com valores vetoriais*.



Definição 1.1.1

Sejam f e g duas funções com valores reais de uma variável real t . Então, para todo número real t do domínio comum a f e g haverá um vetor \mathbf{R} definido por

$$\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$$

e \mathbf{R} será chamado *função com valores vetoriais*.

Exemplo 1.1.1

Seja \mathbf{R} a função vetorial definida por

$$\mathbf{R}(t) = \sqrt{t-2}\mathbf{i} + (t-3)^{-1}\mathbf{j}. \quad (1.1.1)$$

Se $f(t) = \sqrt{t-2}$ e $g(t) = (t-3)^{-1}$, o domínio de \mathbf{R} será o conjunto dos valores de t para os quais ambas $f(t)$ e $g(t)$ estão definidas. Como $f(t)$ está definido para $t \geq 2$ e $g(t)$ está definida para todo t real exceto para $t = 3$, o domínio de \mathbf{R} é $\{t; t \geq 2, t \neq 3\}$.

A equação $\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$ é chamada de **equação vetorial** e define a curva C . Essa mesma curva C também é definida pelas equações

$$x = f(t) \quad \text{e} \quad y = g(t) \quad (1.1.2)$$

que são chamadas de **equações paramétricas** de C . A variável t é um parâmetro. A curva C também é chamada de **gráfico**, isto é, o conjunto de todos os pontos (x, y) satisfazendo (1.1.2) é o gráfico da função com valores vetoriais \mathbf{R} .

A equação vetorial de uma curva, bem como as equações paramétricas de uma curva, dão a ela uma direção em cada ponto. Ou seja, se considerarmos a curva como sendo o caminho descrito por uma partícula no plano, poderemos identificar a direção positiva ao longo da curva como sendo a direção na qual a partícula movimenta-se quando t cresce. Em tal caso, t pode ser tomado como a medida do tempo e o vetor $\mathbf{R}(t)$ como o **vetor posição**.

Se o parâmetro t for eliminado do par de equações (1.1.2), obteremos uma equação em x e y chamada de **equação cartesiana** de C .

Exemplo 1.1.2

Dada a equação vetorial

$$\mathbf{R}(t) = 2 \cos t \mathbf{i} + 2 \sin t \mathbf{j}.$$

(a) Faça um esboço do gráfico dessa equação e (b) ache a equação cartesiana do gráfico.

Solução: O domínio de \mathbf{R} é todo o conjunto dos números reais. Os valores de x e y para valores específicos de t podem ser dispostos em uma tabela. Calculemos o módulo do vetor posição. Para todo t ,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{R}(t)\| &= \sqrt{4 \cos^2 t + 4 \sin^2 t} \\ &= 2\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} \\ &= 2. \end{aligned}$$

Assim, o ponto final da representação posicional de cada vetor $\mathbf{R}(t)$ está a duas unidades da origem. Fazendo t assumir todos os valores do intervalo fechado $[0, 2\pi]$, obtemos uma circunferência de raio 2 e centro na origem. Com isso completamos o gráfico, pois qualquer valor de t dará um ponto sobre essa circunferência. As equações paramétricas da curva são:

$$x = 2 \cos t \quad e \quad y = 2 \sin t.$$

(b) Uma equação cartesiana da curva pode ser encontrada, bastando eliminar t das duas equações paramétricas. Isso pode ser feito se elevarmos ao quadrado cada equação paramétrica e somarmos para obter:

$$x^2 + y^2 = 4.$$

Exemplo 1.1.3

Dadas as equações paramétricas

$$x = t^2 - 2t \quad e \quad y = t + 1$$

(a) Ache uma equação cartesiana da curva e (b) faça um esboço do gráfico definido por essas equações.

Solução (a) Observe que, a partir da segunda equação, $t = y - 1$. Substituindo isto na primeira equação obtemos

$$x = t^2 - 2t = (y - 1)^2 - 2(y - 1) = y^2 - 4y + 3.$$

Assim, a equação cartesiana para essa curva é $x = y^2 - 4y + 3$.

(b) Pela equação cartesiana da curva obtida no item (a) é fácil ver que o gráfico é uma parábola com a concavidade voltada na direção do eixo x positivo e cortando o eixo y nos pontos $y = 1$ e $y = 3$.

Vimos que, eliminando t das equações paramétricas (1.1.2), obtemos a equação cartesiana. Esta, implicitamente ou explicitamente, define y como uma ou mais funções de x . Isto é, se $x = f(t)$ e $y = g(t)$, então $y = h(x)$. Se h for uma função diferenciável de x e f for uma função diferenciável de t , então, pela regra da cadeia,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}.$$

Se $\frac{dx}{dt} \neq 0$, podemos dividir ambos os membros da desigualdade acima por $\frac{dx}{dt}$ e

obter

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}. \quad (1.1.3)$$

A igualdade (1.1.3) possibilita-nos encontrar a derivada de y em relação a x diretamente das equações paramétricas.

Como $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right)$, então $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d(y')}{dx}$. Assim,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d(y')}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \quad (1.1.4)$$

Exemplo 1.1.4

Dadas as equações paramétricas

$$x = 3t^2 \quad e \quad y = 4t^3$$

ache $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{d^2y}{dx^2}$ sem eliminar t .

Solução: Como $\frac{dy}{dt} = 12t^2$ e $\frac{dx}{dt} = 6t$, de (1.1.3) temos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{12t^2}{6t} = 2t.$$

Como $y' = 2t$, $\frac{d(y')}{dt} = 2$. Então, de (1.1.4),

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d(y')}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2}{6t} = \frac{1}{3t}$$

Exemplo 1.1.5

(a) Faça um esboço do gráfico definido pelas equações paramétricas do Exemplo 1.1.4, e (b) ache uma equação cartesiana do gráfico.

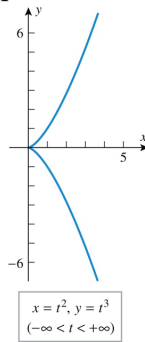
Solução: As equações paramétricas são:

$$x = 3t^2 \quad e \quad y = 4t^3.$$

(a) Observamos que x é não-negativo. Assim, o gráfico está restrito ao primeiro e quarto quadrantes. A Tabela 1 abaixo dá os valores de x e y para valores específicos de t . Como $\frac{dy}{dx} = 2t$ então quando $t = 0$, $\frac{dy}{dx} = 0$. Logo, no ponto $(0, 0)$, a reta tangente é horizontal. Partindo deste fato e com os pontos obtidos na Tabela 1, obtemos o esboço do gráfico que aparece na Figura 1.

Tabela 1

t	x	y
0	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	3	4
2	12	32
$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$
-1	3	-4
-2	12	-32



(b) Das duas equações paramétricas obtemos $x^3 = 27t^6$ e $y^2 = 16t^6$. Resolvendo essas equações para t^6 e eliminando t^6 , obtemos

$$\frac{x^3}{27} = \frac{y^2}{16} \quad \text{ou seja} \quad 16x^3 = 27y^2.$$

que é a equação cartesiana pedida.

Note que se derivarmos a última igualdade implicitamente em relação a x obtemos

$$48x^2 = 54y \frac{dy}{dx} \quad \text{ou, ainda} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{8x^2}{9y}.$$

Substituindo x e y em termos de t pelos valores dados nas equações paramétricas, obtemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8(3t^2)^2}{9(4t^3)} = 2t$$

o que está de acordo com o valor já obtido de $\frac{dy}{dx}$ no exemplo anterior.

Segue de (1.1.3) que se num dado ponto $\frac{dy}{dt} = 0$ e $\frac{dx}{dt} \neq 0$, então $\frac{dy}{dx} = 0$ e o gráfico do par de equações paramétricas terá uma reta tangente horizontal no ponto. Além disso, se num dado ponto $\frac{dx}{dt} = 0$ e $\frac{dy}{dt} \neq 0$, então $\frac{dy}{dx}$ não existirá nesse ponto e o gráfico poderá ter uma reta tangente vertical passando nesse ponto.

• • •

1.1.1. Lista de Exercícios.

Nos exercícios de 1 a 6, ache o domínio da função \mathbf{R} com valores vetoriais.

- | | |
|---|--|
| 1. $\mathbf{R}(t) = (1/t)\mathbf{i} + \sqrt{4-t}\mathbf{j}$ | 2. $\mathbf{R}(t) = (t^2 + 3)\mathbf{i} + (t - 1)\mathbf{j}$ |
| 3. $\mathbf{R}(t) = (\sin^{-1} t)\mathbf{i} + (\cos^{-1} t)\mathbf{j}$ | 4. $\mathbf{R}(t) = \ln(t + 1)\mathbf{i} + (\tan^{-1}(t))\mathbf{j}$ |
| 5. $\mathbf{R}(t) = \sqrt{t^2 - 9}\mathbf{i} + \sqrt{t^2 + 2y - 8}\mathbf{j}$ | 6. $\mathbf{R}(t) = \sqrt{t - 4}\mathbf{i} + \sqrt{4 - t}\mathbf{j}$ |

Nos exercícios de 7 a 12, ache $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{d^2y}{dx^2}$, sem eliminar o parâmetro.

- | | |
|--|--|
| 7. $x = 3t, \quad y = 2t^2$ | 8. $x = 1 - t^2, \quad y = 1 + t$ |
| 9. $x = t^2 e^t, \quad y = t \ln t$ | 10. $x = e^{2t}, \quad y = 1 + \cos t$ |
| 11. $x = a \cos t, \quad y = b \sin t$ | 12. $x = \sec t, \quad y = \tan t$ |

13. Ache uma equação da reta tangente à curva $x = 1 + 3 \sin t, \quad y = 2 - 5 \cos t$, no ponto onde $t = \frac{\pi}{6}$.

14. Ache uma equação da reta tangente à curva $x = 2 \sin t, \quad y = 5 \cos t$, no ponto onde $t = \frac{\pi}{3}$.

15. Um projétil move-se de tal forma que sua posição em cada instante t seja dada pelas equações paramétricas $x = 60t$ e $y = 80t - 16t^2$. Faça um esboço da trajetória do projétil.

1.2. Cálculo de Funções com Valores Vetoriais

As definições de limites, continuidade, derivadas e integrais indefinidas de funções vetoriais envolvem as definições correspondentes para funções com valores reais.

Definição 1.2.1

Seja \mathbf{R} uma função com valores vetoriais cujos valores funcionais são dados por

$$\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}.$$

Então, o limite de $\mathbf{R}(t)$ quando t tende a t_0 será definido por

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{R}(t) = \left[\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) \right] \mathbf{i} + \left[\lim_{t \rightarrow t_0} g(t) \right] \mathbf{j}$$

se $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t)$ e $\lim_{t \rightarrow t_0} g(t)$ existirem.

Definição 1.2.2

A função \mathbf{R} com valores vetoriais será contínua em t_0 se e somente se as três condições seguintes forem satisfeitas:

- (i) $\mathbf{R}(t_0)$ existe;
- (ii) $\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{R}(t)$ existe;
- (iii) $\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{R}(t) = \mathbf{R}(t_0)$.

Definição 1.2.3

Se \mathbf{R} for uma função com valores vetoriais, então a **derivada** de \mathbf{R} também será uma função com valores vetoriais, denotada por \mathbf{R}' e definida por

$$\mathbf{R}'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{R}(t + \Delta t) - \mathbf{R}(t)}{\Delta t}$$

se esse limite existir.

As notações $\frac{d\mathbf{R}}{dt}(t)$ e $D_t\mathbf{R}(t)$ poderão ser usadas ao invés de $\mathbf{R}'(t)$.

Teorema 1.2.1

Se \mathbf{R} for uma função com valores vetoriais definida por

$$\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$$

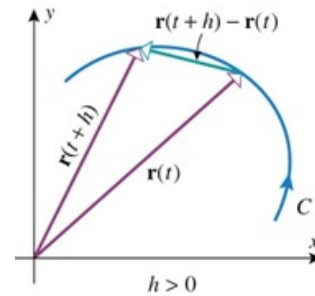
então

$$\mathbf{R}'(t) = f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j}$$

se $f'(t)$ e $g'(t)$ existirem.

Uma interpretação geométrica da Definição 1.2.3 pode ser obtida se considerarmos as representações dos vetores $\mathbf{R}(t)$, $\mathbf{R}(t + \Delta t)$ e $\mathbf{R}'(t)$.

A curva C é traçada pelo ponto final da representação posicional de $\mathbf{R}(t)$ quando t assume todos os valores do domínio de R . Se o vetor $\mathbf{R}(t + \Delta t) - \mathbf{R}(t)$ for multiplicado pelo escalar $1/\Delta t$, obtemos um vetor com mesma direção e cujo módulo é $1/|\Delta t|$ vezes o módulo de $\mathbf{R}(t + \Delta t) - \mathbf{R}(t)$. Quando Δt tende a zero, o vetor $[\mathbf{R}(t + \Delta t) - \mathbf{R}(t)]/\Delta t$ tende a um vetor tendo uma de suas representações tangente à curva C no ponto t .



Definição 1.2.4

Dizemos que uma função com valores vetoriais \mathbf{R} é **diferenciável** num intervalo se $\mathbf{R}'(t)$ existir para todos os valores de t no intervalo.

O teorema abaixo dá as fórmulas de derivação para funções com valores vetoriais. As demonstrações baseiam-se no teoremas sobre derivação de funções com valores reais.

Teorema 1.2.2

Sejam \mathbf{R} e \mathbf{Q} funções vetoriais deriváveis de t , \mathbf{C} um vetor constante, c qualquer escalar e f qualquer função escalar derivável.

1. Regra da função constante: $\frac{d}{dt}\mathbf{C} = \mathbf{0}$.

2. Regras da multiplicação por escalar: $\frac{d}{dt}[c\mathbf{R}(t)] = c\mathbf{R}'(t)$.

por escalar: $\frac{d}{dt}[f(t)\mathbf{R}(t)] = f'(t)\mathbf{R}(t) + f(t)\mathbf{R}'(t)$.

3. Regra da soma: $\frac{d}{dt}[\mathbf{R}(t) + \mathbf{Q}(t)] = \mathbf{R}'(t) + \mathbf{Q}'(t)$.

4. Regra da diferença: $\frac{d}{dt}[\mathbf{R}(t) - \mathbf{Q}(t)] = \mathbf{R}'(t) - \mathbf{Q}'(t)$.

5. Regra do produto escalar: $\frac{d}{dt}[\mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{Q}(t)] = \mathbf{R}'(t) \cdot \mathbf{Q}(t) + \mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{Q}'(t)$.

6. Regra da cadeia: $\frac{d}{dt}[\mathbf{R}(f(t))] = f'(t)\mathbf{R}'(f(t))$

Vamos definir agora uma integral indefinida (ou antiderivada) de uma função com valores vetoriais.

Definição 1.2.5

Se \mathbf{Q} for a função com valores vetoriais dada por

$$\mathbf{Q}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$$

então a **integral indefinida de $\mathbf{Q}(t)$** será definida por

$$\int \mathbf{Q}(t) dt = \left(\int f(t) dt \right) \mathbf{i} + \left(\int g(t) dt \right) \mathbf{j}. \quad (1.2.1)$$

Essa definição é consistente com aquela da integral indefinida de uma função com valores reais, pois se tomarmos a derivada de ambos os membros de (1.2.1) em relação

a t ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int \mathbf{Q}(t) dt &= \frac{d}{dt} \left(\int f(t) dt \right) \mathbf{i} + \frac{d}{dt} \left(\int g(t) dt \right) \mathbf{j} \\ &= \mathbf{i} \frac{d}{dt} \left(\int f(t) dt \right) + \mathbf{j} \frac{d}{dt} \left(\int g(t) dt \right) \\ &= f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}. \end{aligned}$$

Cada uma das integrais do lado direito de (1.2.1) dá origem a uma constante real arbitrária. Quando multiplicamos cada uma das constantes por \mathbf{i} e por \mathbf{j} obtemos um vetor constante arbitrário na soma. Assim,

$$\int \mathbf{Q}(t) dt = \mathbf{R}(t) + \mathbf{C}$$

onde $\frac{d}{dt} \mathbf{R}(t) = \mathbf{Q}(t)$ e \mathbf{C} é um vetor constante arbitrário.

Exemplo 1.2.1

Ache a função com valores vetoriais mais geral, cuja a derivada é

$$\mathbf{Q}(t) = \sin t \mathbf{i} - 3 \cos t \mathbf{j}.$$

Solução: Se $\mathbf{R}'(t) = \mathbf{Q}(t)$, então $\mathbf{R}(t) = \int \mathbf{Q}(t) dt$, isto é,

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(t) &= \mathbf{i} \int \sin t dt - 3\mathbf{j} \int \cos t dt \\ &= \mathbf{i}(-\cos t + C_1) - 3\mathbf{j}(\sin t + C_2) \\ &= -\cos t \mathbf{i} - 3 \sin t \mathbf{j} + (C_1 \mathbf{i} - 3C_2 \mathbf{j}) \\ &= -\cos t \mathbf{i} - 3 \sin t \mathbf{j} + \mathbf{C}. \end{aligned}$$

O seguinte teorema nos será útil mais adiante.

Teorema 1.2.3

Se \mathbf{R} for uma função com valores vetoriais, diferenciável em um intervalo e $\|\mathbf{R}(t)\|$ for constante para todo t no intervalo, então os vetores $\mathbf{R}(t)$ e $\mathbf{R}'(t)$ serão ortogonais.

A interpretação geométrica do teorema anterior é a seguinte: se o vetor $\mathbf{R}(t)$ tiver módulo constante, então sua representação posicional terá seu ponto final sobre a

circunferência centrada na origem e de raio igual a $\|\mathbf{R}(t)\|$. Assim, o gráfico de $\mathbf{R}(t)$ é essa circunferência. Como $\mathbf{R}'(t)$ e $\mathbf{R}(t)$ são ortogonais as representações de $\mathbf{R}(t)$ serão perpendiculares às representações de $\mathbf{R}'(t)$.

• • •

1.2.1. Lista de exercícios

Nos exercícios de 1 a 5, ache o limite indicado, se ele existir.

- | | |
|--|--|
| 1. $\mathbf{R}(t) = (3t - 2)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}; \lim_{t \rightarrow 2} \mathbf{R}(t)$ | 2. $\mathbf{R}(t) = (t - 2)\mathbf{i} + \frac{t^2 - 4}{t - 2}\mathbf{j}; \lim_{t \rightarrow 2} \mathbf{R}(t)$ |
| 3. $\mathbf{R}(t) = 2 \sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j}; \lim_{t \rightarrow \pi/2} \mathbf{R}(t)$ | 4. $\mathbf{R}(t) = \frac{t^2 - 2t - 3}{t - 3}\mathbf{i} + \frac{t^2 - 5t + 6}{t - 3}\mathbf{j}; \lim_{t \rightarrow 3} \mathbf{R}(t)$ |
| 5. $\mathbf{R}(t) = e^{t+1}\mathbf{i} + t + 1 \mathbf{j}; \lim_{t \rightarrow -1} \mathbf{R}(t)$ | |

Nos exercícios de 6 a 14, ache \mathbf{R}' e \mathbf{R}'' .

- | | |
|---|--|
| 6. $\mathbf{R}(t) = (t^2 - 3)\mathbf{i} + (2t + 1)\mathbf{j}$ | 7. $\mathbf{R}(t) = e^{2t}\mathbf{i} + \ln t \mathbf{j}$ |
| 8. $x\mathbf{R}(t) = \cos(2t)\mathbf{i} + \tan t \mathbf{j}$ | 9. $\mathbf{R}(t) = \tan^{-1} t \mathbf{i} + 2^t \mathbf{j}$ |
| 10. $\mathbf{R}(t) = \frac{t - 1}{t + 1}\mathbf{i} + \frac{t - 2}{t}\mathbf{j}$ | 11. $\mathbf{R}(t) = (t^2 + 4)^{-1}\mathbf{i} + \sqrt{1 - 5t}\mathbf{j}$ |
| 12. $\mathbf{R}(t) = \sqrt{2t + 1}\mathbf{i} + (t - 1)^2\mathbf{j}$ | 13. $\mathbf{R}(t) = (5 \sin(2t))\mathbf{i} - \sec(4t)\mathbf{j}$ |
| 14. $\mathbf{R}(t) = (e^{3t} + 2)\mathbf{i} + 2e^{3t}\mathbf{j}$ | |

Nos exercícios 15 e 16, ache $\frac{d}{dt}\|\mathbf{R}(t)\|$.

- | | |
|---|---|
| 15. $\mathbf{R}(t) = (t - 1)\mathbf{i} + (2 - t)\mathbf{j}$ | 16. $\mathbf{R}(t) = (e^t + 1)\mathbf{i} + (e^t - 1)\mathbf{j}$ |
|---|---|

Nos exercícios de 17 a 20, ache $\mathbf{R}'(t) \cdot \mathbf{R}''(t)$.

- | | |
|--|--|
| 17. $\mathbf{R}(t) = (2t^2 - 1)\mathbf{i} + (t^2 + 3)\mathbf{j}$ | 18. $\mathbf{R}(t) = (\ln(t - 1))\mathbf{i} - 3t^{-1}\mathbf{j}$ |
| 19. $\mathbf{R}(t) = (e^{2t}\mathbf{i} + e^{-2t}\mathbf{j})$ | 20. $\mathbf{R}(t) = -\cos(2t)\mathbf{i} + \sin(2t)\mathbf{j}$ |

Nos exercícios de 21 a 26, ache o vetor mais geral cuja derivada é a função dada.

21. $(t^2 - 9)\mathbf{i} + (2t - 5)\mathbf{j}$

22. $\tan t\mathbf{i} - \frac{1}{t}\mathbf{j}$

23. $3^t\mathbf{i} - 2^t\mathbf{j}$

24. $e^{3t}\mathbf{i} + \frac{1}{t-1}\mathbf{j}$

25. $\frac{1}{4+t^2}\mathbf{i} - \frac{4}{1-t^2}\mathbf{j}$

26. $\ln t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$

1.3. Comprimento de arco

Vamos introduzir o conceito de comprimento de arco de uma curva plana através de um exemplo.

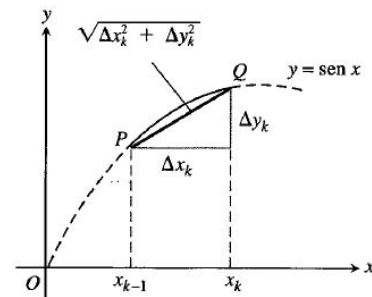
Exemplo 1.3.1

Qual é o comprimento da curva $y = \sin x$ de $x = 0$ a $x = 2\pi$?

Solução: Responderemos essa pergunta por integração, seguindo o plano usual de quebrar o inteiro em partes mensuráveis. Dividimos o intervalo $[0, 2\pi]$ em intervalos tão pequenos que as partes da curva (chamadas "arcos") que estão diretamente acima dos intervalos são praticamente retas. Assim, podemos tomar o comprimento de cada segmento de reta como uma aproximação para o comprimento do arco.

A Figura ao lado mostra o segmento como uma aproximação para o arco acima do intervalo $[x_{k-1}, x_k]$. O comprimento do segmento é $\sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$. A soma

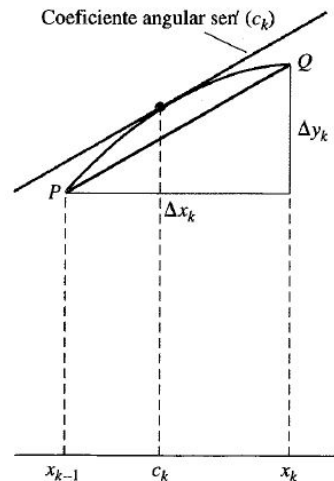
$$\sum \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$$



ao longo da partição inteira constitui uma aproximação para o comprimento da curva. Agora só precisamos determinar o limite dessa soma quando as normas das partições tendem a zero. Esse é o plano usual, mas desta vez há um problema. O problema é que a soma, como está escrita, não é uma soma de Riemann. Ela não tem a forma $\sum f(c_k)\Delta x_k$. Entretanto, se multiplicarmos e dividirmos cada raiz quadrada por Δx_k , então poderemos reescrever a soma acima como

$$\sum \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} = \sum \sqrt{1 + \frac{(\Delta y_k)^2}{(\Delta x_k)^2}} \Delta x_k.$$

Isso é melhor, mas ainda precisamos escrever a última raiz quadrada como uma função calculada em algum ponto c_k no k -ésimo subintervalo. Para isso, apelaremos para o Teorema do Valor Médio para funções deriváveis que diz: se $\sin x$ for contínua em $[x_{k-1}, x_k]$ e derivável em (x_{k-1}, x_k) , há um ponto c_k em $[x_{k-1}, x_k]$ onde $\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k} = \sin' c_k$ (veja a figura ao lado).



Isso nos dá

$$\sum \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} = \sum \sqrt{1 + (\sin' c_k)^2} \Delta x_k.$$

que é uma soma de Riemann.

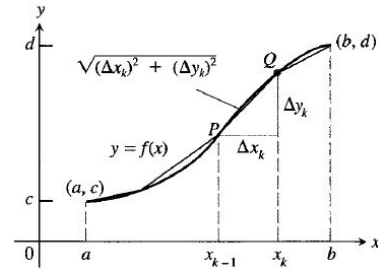
Agora tomando o limite quando as normas das subdivisões tendem a zero obtemos que o comprimento da curva dada pela função $y = \sin x$ de 0 até 2π é

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{1 + (\sin' x)^2} dx = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + (\cos x)^2} dx \approx 7,64$$

Estamos quase prontos para definir o comprimento de uma curva como uma integral definida, usando o procedimento do exemplo anterior. Mas, antes disso, devemos prestar atenção em duas propriedades da função seno que utilizamos no exemplo.

Uma delas é o fato de a função ser diferenciável para podermos aplicar o Teorema do Valor Médio quando substituimos $\Delta y_k / \Delta x_k$ por $\sin'(c_k)$ para algum c_k no intervalo $[x_{k-1}, x_k]$. O outro fato, um pouco menos óbvio, é que usamos a continuidade da derivada da função seno ao passar de $\sum \sqrt{1 + (\sin' c_k)^2} \Delta x_k$ para a integral de Riemann. Assim, o requisito necessário para determinar o comprimento de uma curva através desse método é que a função tenha a primeira derivada contínua. Chamamos essa propriedade de **lisura**. Uma função com a primeira derivada contínua é **lisa** e seu gráfico é uma curva **lisa**.

Vamos rever o processo agora para uma função lisa geral $f(x)$. Suponha que o gráfico comece no ponto (a, c) e termine em (b, d) , como se vê na figura ao lado. Dividiremos o intervalo $a \leq x \leq b$ em subintervalos tão pequenos que os arcos acima deles são quase retas. O comprimento do segmento que faz a



aproximação para o arco acima do subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ é $\sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$. A soma $\sum \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$ é uma aproximação para o comprimento da curva. Aplicamos a f o Teorema do Valor Médio em cada subintervalo e finalmente temos a soma reescrita como uma soma de Riemann.

$$\begin{aligned} \sum \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} &= \sum \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right)^2} \Delta x_k \\ &= \sum \sqrt{1 + (f'(c_k))^2} \Delta x_k. \end{aligned}$$

Passando ao limite, à medida que as normas das subdivisões tendem a zero, obtemos o comprimento da curva como

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$

Definição 1.3.1

Se f for lisa em $[a, b]$, então o **comprimento** da curva $y = f(x)$, de a até b , é o número

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx. \quad (1.3.1)$$

Exemplo 1.3.2

Determine o comprimento de uma circunferência de raio r centrada na origem dos eixos coordenados.

Solução: Para isto basta tomar o dobro do comprimento da semicircunferência dada por

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}, \quad -r \leq x \leq r,$$

que fica no semiplano superior $y \geq 0$. Então, de acordo com (1.3.1), o comprimento

da circunferência é dado por

$$s = 2 \int_{-r}^r \sqrt{1 + (y')^2} dx = 2 \int_{-r}^r \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Pondo $x = r \cos \theta$, obtemos $dx = -r \sin \theta d\theta$ e

$$s = -2r \int_{\pi}^0 d\theta = 2\pi r,$$

que é o resultado esperado.

Exemplo 1.3.3

Calcule o comprimento do arco da curva

$$y = x^{2/3}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Solução: Se aplicarmos a expressão (1.3.1) diretamente obteremos a integral

$$s = \int_0^1 \frac{\sqrt{9x^{2/3} + 4}}{3x^{1/3}} dx,$$

que pode ser resolvida fazendo uma mudança de variável do tipo $x = z^3$. Mas se observarmos bem veremos que é possível descrever essa curva como uma função de y ao invés de x , ou seja, $x = y^3/2$, $0 \leq y \leq 1$. Neste caso, o comprimento de arco pode ser calculado pela integral

$$s = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{9y}{4}\right)^2} dy = \frac{13^{3/2} - 8}{27} \approx 1,44.$$

Vamos voltar a equação (1.3.1) e reescrevê-la trocando a variável de integração x por t e o limite b por x . O comprimento de arco s passa a ser uma função de x , digamos $s(x)$ (ou simplesmente s , se não houver ambiguidade):

$$s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt = \int_a^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \tag{1.3.2}$$

Daqui e do Teorema Fundamental do Cálculo segue-se que

$$s'(x) = \sqrt{1 + (f'(x))^2} \tag{1.3.3}$$

Observe que este resultado independe do ponto a particular, a partir do qual começamos a medir o arco. Se escolhêssemos outro ponto c , em vez de a , isso só faria alterar a expressão (1.3.2) por uma constante aditiva e não mudaria a derivada (1.3.3).

Uma outra observação é que podemos escrever a equação (1.3.1) de uma forma mais resumida. Usualmente a equação (1.3.1) é escrita usando-se diferenciais em vez de derivadas. Isso é feito formalmente pensando-se nas derivadas como um quociente de diferenciais. De fato,

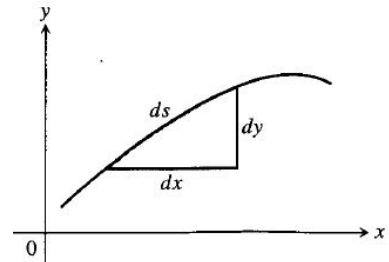
$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{1 + \frac{(dy)^2}{(dx)^2}} dx = \sqrt{\frac{(dx)^2 + (dy)^2}{(dx)^2}} dx = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

Assim, o comprimento de arco pode ser escrito como

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}. \tag{1.3.4}$$

É claro que dx e dy devem ser expressas em termos de uma variável comum, devendo-se encontrar os limites de integração α e β adequados antes de fazer a integração na equação (1.3.4).

Podemos resumir a equação (1.3.4) ainda mais. Pense em dx e dy como os lados de um pequeno triângulo retângulo cuja a "hipotenusa" seja $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ (veja figura ao lado). A diferencial ds é então considerada como uma diferencial do comprimento de arco, que pode ser integrada entre limites adequados para dar o comprimento da curva.



Igualando-se $\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ a ds , a integral na equação (1.3.4) se torna simplesmente a integral de ds .

Definição 1.3.2

A Diferencial para o Comprimento de Arco e a Fórmula Diferencial para o Comprimento de Arco.

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \qquad s = \int ds.$$

Buscaremos agora, uma expressão que facilite o cálculo do comprimento do arco de uma curva dada por uma parametrização.

Suponha que a curva C possa ser descrita pelas equações paramétricas $x = f(t)$ e $y = g(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$. Essa curva será lisa se f e g tiverem derivadas de primeira ordem contínuas que não sejam simultaneamente nulas. Encontramos uma integral

para o comprimento de uma curva lisa $x = f(t)$, $y = g(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, reescrevendo a integral $s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} s &= \int_{t=\alpha}^{t=\beta} \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{(dx)^2}{(dt)^2} + \frac{(dy)^2}{(dt)^2}\right) (dt)^2} \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt. \end{aligned}$$

O único requisito além da continuidade, é que o ponto $P(x, y) = P(f(t), g(t))$ não trace nenhuma parte da curva mais que uma vez quando t se desloca de α a β .

Definição 1.3.3

Se uma curva C for descrita por equações paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, onde f' e g' são contínuas e não simultaneamente nulas em $[\alpha, \beta]$, e se C for percorrida exatamente uma vez, quando t vai de α a β , então o comprimento de C será

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2} dt = \int_{\alpha}^{\beta} \|\mathbf{R}'(t)\| dt \quad (1.3.5)$$

onde $\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$.

Exemplo 1.3.4

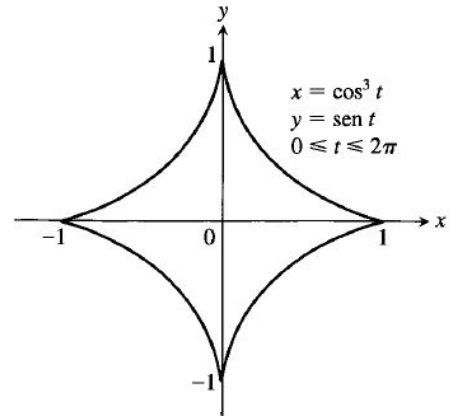
Determine o comprimento do astróide (Figura abaixo)

$$x = \cos^3 t, \quad y = \sin^3 t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Solução: Devido à simetria da curva em relação aos eixos das coordenadas, seu comprimento é quatro vezes o comprimento da porção que está no primeiro quadrante. Temos então

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = [3 \cos^2 t (-\sin t)]^2 = 9 \cos^4 t \sin^2 t$$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = [3 \sin^2 t (\cos t)]^2 = 9 \sin^4 t \cos^2 t$$



$$\begin{aligned} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} &= \sqrt{9 \cos^2 t \sin^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t)} = \sqrt{9 \cos^2 t \sin^2 t} \\ &= 3 |\cos t \sin t| = 3 \cos t \sin t. \end{aligned}$$

Portanto, o comprimento da porção no primeiro quadrante é

$$\int_0^{\pi/2} 3 \cos t \sin t dt = \frac{3}{2},$$

e, conseqüentemente, o comprimento total do astróide é $4(3/2) = 6$.

...

1.3.1. Lista de Exercícios.

Nos exercícios de 1 a 10, determine os respectivos comprimentos.

$$1. y = \frac{(x^2 + 2)^{3/2}}{3}, \quad \text{de } x = 0 \quad \text{a} \quad x = 3;$$

$$2. y = x^{3/2}, \quad \text{de } x = 0 \quad \text{a} \quad x = 4;$$

$$3. x = (y^3/3) + 1/(4y), \quad \text{de } y = 1 \quad \text{a} \quad y = 3;$$

$$4. x = \frac{y^{3/2}}{3} - y^{1/2}, \quad \text{de } y = 1 \quad \text{a} \quad y = 9;$$

$$5. x = (y^4/4) + 1/(8y^2), \quad \text{de } y = 1 \quad \text{a} \quad y = 2;$$

$$6. x = (y^3/6) + 1/(2y), \quad \text{de } y = 2 \quad \text{a} \quad y = 3;$$

$$7. y = \frac{3x^{4/3}}{4} - \frac{3x^{2/3}}{8} + 5, \quad 1 \leq x \leq 8;$$

$$8. y = \frac{x^3}{3} + x^2 + x + \frac{1}{4x + 4}, \quad 0 \leq x \leq 2;$$

$$9. x = \int_0^y \sqrt{\sec^4 t - 1} dt, \quad -\pi/4 \leq y \leq \pi/4;$$

$$10. y = \int_{-2}^x \sqrt{3t^4 - 1} dt, \quad -2 \leq x \leq -1.$$

Nos exercícios de 11 a 16, determine o comprimento das curvas.

11. $x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi;$

12. $x = \cos t, \quad y = t + \sin t, \quad 0 \leq t \leq \pi;$

13. $x = e^t - t, \quad y = 4e^{t/2}, \quad 0 \leq t \leq 3;$

14. $x = \frac{t^2}{2}, \quad y = \frac{(2t+1)^{3/2}}{3}, \quad 0 \leq t \leq 4;$

15. $x = e^t \cos t, \quad y = e^t \sin t, \quad 0 \leq t \leq \pi;$

16. $x = 8 \cos t + 8t \sin t, \quad y = 8 \sin t - 8t \cos t, \quad 0 \leq t \leq \pi/2.$

1.4. Os Vetores unitários da Tangente e da Normal e o Comprimento de Arco como um Parâmetro.

A cada ponto da curva no plano agora associamos dois outros vetores unitários, o *vetor tangente unitário* e o *vetor normal unitário*. Esses vetores aparecem em muitas aplicações de funções com valores vetoriais.

Definição 1.4.1

Se $\mathbf{R}(t)$ for o vetor posição da curva C num ponto P de C , então o **vetor tangente unitário** $\mathbf{T}(t)$, será o vetor unitário na direção de $\mathbf{R}'(t)$, se $\mathbf{R}'(t) \neq \mathbf{0}$.

O vetor unitário na direção de $\mathbf{R}'(t)$ é dado por $\frac{\mathbf{R}'(t)}{\|\mathbf{R}'(t)\|}$; assim,

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{R}'(t)}{\|\mathbf{R}'(t)\|}. \quad (1.4.1)$$

Como $\mathbf{T}(t)$ é um vetor unitário, segue do Teorema 1.2.3 que $\frac{d}{dt}\mathbf{T}(t)$ deve ser ortogonal a $\mathbf{T}(t)$. Agora, $\mathbf{T}'(t)$ não é necessariamente um vetor unitário. Entretanto, o vetor $\frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|}$ é de módulo unitário e tem a mesma direção que $\frac{d}{dt}\mathbf{T}(t)$, logo $\frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|}$ é um vetor unitário ortogonal a $\mathbf{T}(t)$, sendo chamado de *vetor normal unitário*.

Definição 1.4.2

Se $\mathbf{T}(t)$ for o vetor tangente unitário da curva C no ponto P , então o **vetor normal unitário** denotado por $\mathbf{N}(t)$, será o vetor unitário na direção de $\mathbf{T}'(t)$.

Da definição e da discussão anteriores,

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|}. \quad (1.4.2)$$

Exemplo 1.4.1

Dada a curva descrita pelas equações paramétricas

$$x = t^3 - 3t \quad e \quad y = 3t^2$$

ache $\mathbf{T}(t)$ e $\mathbf{N}(t)$.

Solução: Uma equação vetorial da curva é

$$\mathbf{R}(t) = (t^3 - 3t)\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j}.$$

Assim,

$$\mathbf{R}'(t) = (3t^2 - 3)\mathbf{i} + 6t\mathbf{j}, \quad \|\mathbf{R}'(t)\| = \sqrt{(3t^2 - 3)^2 + (6t)^2} = 3(t^2 + 1)$$

Logo

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{R}'(t)}{\|\mathbf{R}'(t)\|} = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}\mathbf{i} + \frac{2t}{t^2 + 1}\mathbf{j}.$$

Agora, diferenciando $\mathbf{T}(t)$ em relação a t obtemos

$$\mathbf{T}'(t) = \frac{4t}{(t^2 + 1)^2}\mathbf{i} + \frac{2 - 2t^2}{(t^2 + 1)^2}\mathbf{j}.$$

Donde,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{T}'(t)\| &= \sqrt{\frac{16t^2}{(t^2 + 1)^4} + \frac{4 - 8t^2 + 4t^4}{(t^2 + 1)^4}} \\ &= \sqrt{\frac{4^8t^2 + 4t^4}{(t^2 + 1)^4}} \\ &= \sqrt{\frac{4(t^2 + 1)^2}{(t^2 + 1)^4}} \\ &= \frac{2}{t^2 + 1}. \end{aligned}$$

Conseqüentemente,

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|} = \frac{2t}{t^2 + 1}\mathbf{i} + \frac{1 - t^2}{t^2 + 1}\mathbf{j}.$$

Algumas vezes, em vez de um parâmetro t qualquer, precisamos usar o parâmetro s , que é o comprimento de arco compreendido entre um ponto arbitrariamente escolhido $P_0(x_0, y_0)$ na curva C e o ponto $P(x, y)$ na mesma curva. Vamos supor que s seja crescente quando t cresce; assim, s será positivo se o comprimento do arco for medido na direção crescente de t e será negativo, se o comprimento do arco for medido na direção oposta. Portanto, s é uma distância orientada. Também, $\frac{ds}{dt} > 0$. A cada valor de s corresponde um único ponto P sobre a curva C . Conseqüentemente, as coordenadas de P são funções de s , e s é uma função de t . Do que vimos anteriormente, temos que

$$\mathbf{R}'(t) = \|\mathbf{R}'(t)\|\mathbf{T}(t) \quad \text{e} \quad \|\mathbf{R}'(t)\| = \frac{ds}{dt}$$

Substituindo a segunda igualdade na primeira obtemos

$$\mathbf{R}'(t) = \frac{ds}{dt} \mathbf{T}(t).$$

Se o parâmetro for s em vez de t , temos dessa equação, tomando $t = s$ e levando em conta que $\frac{ds}{ds} = 1$,

$$\mathbf{R}'(s) = \mathbf{T}(s).$$

Vamos enunciar esse resultado como um teorema.

Teorema 1.4.1

Se a equação vetorial de uma curva C for $\mathbf{R}(s) = f(s)\mathbf{i} + g(s)\mathbf{j}$, onde s é a medida do comprimento de arco entre um dado ponto P_0 em C e o ponto P , então o vetor tangente unitário de C em P será dado por

$$\mathbf{T}(s) = \mathbf{R}'(s)$$

se existir.

Suponha agora que as equações paramétricas de uma curva C envolvam um parâmetro t , e queremos encontrar as equações paramétricas de C , com s , o comprimento de arco medido a partir de um ponto fixo, como parâmetro. Frequentemente as operações envolvidas são bastante complicadas. Mas, o método usado será ilustrado no exemplo a seguir.

Exemplo 1.4.2

Suponha que as equações paramétricas da curva C sejam

$$x = t^3, \quad y = t^2, \quad t \geq 0.$$

Ache as equações paramétricas de C tendo s como parâmetro, onde s é o comprimento de arco medido a partir do ponto onde $t = 0$.

Solução: O ponto onde $t = 0$ é a origem. uma equação vetorial de C é

$$\mathbf{R}(t) = t^3\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}.$$

Como $\frac{ds}{dt} = \|\mathbf{R}'(t)\|$, diferenciamos o vetor acima e obtemos

$$\mathbf{R}'(t) = 3t^2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}, \quad \|\mathbf{R}'(t)\| = t\sqrt{9t^2 + 4}, \quad \text{pois } t \geq 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dt} &= t\sqrt{9t^2 + 4} \\ s &= \int t\sqrt{9t^2 + 4} dt \\ &= \frac{1}{27}(9t^2 + 4)^{3/2} + C.\end{aligned}$$

Como $s = 0$ quando $t = 0$, obtemos $C = -\frac{8}{27}$. Logo,

$$s = \frac{1}{27}(9t^2 + 4)^{3/2} - \frac{8}{27}.$$

Resolvendo para t em termos de s , temos

$$\begin{aligned}(9t^2 + 4)^{3/2} &= 27s + 8 \\ 9t^2 + 4 &= (27s + 8)^{2/3}\end{aligned}$$

Como $t \geq 0$,

$$t = \frac{1}{3}\sqrt{(27s + 8)^{2/3} - 4}$$

Substituindo esse valor de t nas equações paramétricas de C , obtemos

$$x = \frac{1}{27}[(27s + 8)^{2/3} - 4]^{3/2} \quad \text{e} \quad y = \frac{1}{9}[(27s + 8)^{2/3} - 4].$$

• • •

1.4.1. Lista de exercícios

Nos exercícios de 1 a 6, ache $\mathbf{T}(t)$ e $\mathbf{N}(t)$.

1. $\mathbf{R}(t) = t^2\mathbf{i} + e^t\mathbf{j}$;

2. $\mathbf{R}(t) = t \cos t\mathbf{i} + t \sin t\mathbf{j}$;

3. $\mathbf{R}(t) = \sin^3 t\mathbf{i} + \cos^3 t\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$;

4. $\mathbf{R}(t) = \sqrt{1+t^2}\mathbf{i} + t\mathbf{j}$;

5. $\mathbf{R}(t) = 4t\mathbf{i} + 2t^2\mathbf{j}$;

6. $\mathbf{R}(t) = (1+t)\mathbf{i} + \ln(\cos t)\mathbf{j}$.

7. Ache as equações paramétricas da curva $y = x^{3/2}$ tendo o comprimento do arco s como parâmetro, onde s é medido a partir do ponto onde $t = 0$.

8. Se a curva C tiver $\mathbf{R}(t) = 3t^2\mathbf{i} + (t^3 - 3t)\mathbf{j}$ como equação vetorial, ache o cosseno do ângulo entre os vetores $\mathbf{R}(2)$ e $\mathbf{T}(2)$.

1.5. Curvas em \mathbb{R}^3

Vamos considerar agora funções com valores vetoriais definidas no espaço tridimensional.

Definição 1.5.1

Sejam f, g e h três funções com valores reais de uma variável real t . Então, para todo número real t do domínio comum a f, g e h há um vetor \mathbf{R} definido por

$$\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$$

e \mathbf{R} é chamada **função com valores vetoriais**.

O gráfico de uma função com valores vetoriais no espaço tridimensional é obtido de forma análoga ao que foi feito para uma função com valores vetoriais no espaço bidimensional na seção anterior. Quando t assume todos os valores no domínio de \mathbf{R} , o ponto final da representação posicional do vetor $\mathbf{R}(t)$ traça uma curva C , e essa curva é chamada de gráfico de \mathbf{R} . Um ponto na curva C tem a representação cartesiana (x, y, z) onde

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t).$$

Essas equações são chamadas de **equações paramétricas** de C , enquanto que a equação da definição 1.5.1 é chamada de uma **equação vetorial** de C . Eliminando t das equações (1.5), obtemos duas equações em x, y e z que são chamadas de **equações cartesianas** de C . Cada uma delas é a equação de uma superfície e a curva C é a interseção delas. As equações de qualquer par de superfícies transversais em C podem ser tomadas como equações cartesianas da curva.

Exemplo 1.5.1

Vamos traçar o esboço da curva com equação vetorial

$$\mathbf{R}(t) = a \cos t \mathbf{i} + b \sin t \mathbf{j} + t \mathbf{k}.$$

Solução: As equações paramétricas da curva são:

$$x = a \cos t \quad y = b \sin t \quad z = t.$$

Para eliminar t das duas primeiras equações, escrevemos

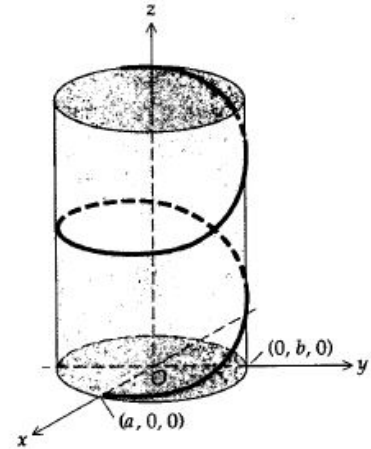
$$\frac{x^2}{a^2} = \cos^2 t \quad \text{e} \quad \frac{y^2}{b^2} = \sin^2 t.$$

Somando membro a membro, obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Logo, a curva está inteiramente cilindro elíptico cuja diretriz é uma elipse no plano xy . Um esboço da curva está na figura ao lado.

A curva desse exemplo é chama de **hélice**. Se $a=b$, a hélice é uma **hélice circular** e está no cilindro circular reto $x^2 + y^2 = a^2$.



Exemplo 1.5.2

A curva tendo a equação vetorial

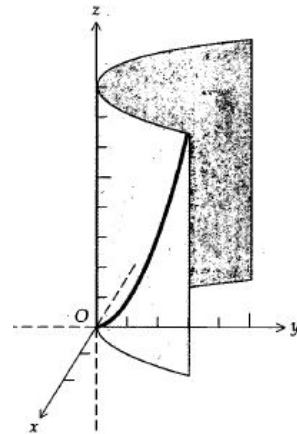
$$\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$$

é chamada de **cúbica retorcida**.

As equações paramétricas da cúbica retorcida são

$$x = t \quad y = t^2 \quad z = t^3.$$

Eliminando a variável t das duas primeiras equações obtemos $y = x^2$ que é um cilindro cuja diretriz no plano xy é uma parábola. A figura ao lado mostra um esboço do cilindro e uma parte da cúbica retorcida de $t = 0$ a $t = 2$.



A definição relativa ao limite de uma função com valores vetoriais em duas dimensões pode ser estendida a funções com valores vetoriais em três dimensões como segue. Se

$$\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$$

então

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{R}(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} f(t)\mathbf{i} + \lim_{t \rightarrow t_0} g(t)\mathbf{j} + \lim_{t \rightarrow t_0} h(t)\mathbf{k}$$

se $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t)$, $\lim_{t \rightarrow t_0} g(t)$ e $\lim_{t \rightarrow t_0} h(t)$ existirem.

As definições de continuidade e da derivada de funções com valores vetoriais em duas dimensões são as mesmas para aquelas em três dimensões. O teorema abaixo também tem seu análogo no \mathbb{R}^2 .

Teorema 1.5.1

Se \mathbf{R} for uma função com valores vetoriais definida por

$$\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$$

então

$$\mathbf{R}'(t) = f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j} + h'(t)\mathbf{k}$$

se $f'(t)$, $g'(t)$ e $h'(t)$ existirem.

A interpretação geométrica também é a mesma, assim como as definições do vetor tangente unitário e do vetor normal unitário.

Exemplo 1.5.3

Vamos encontrar o vetor tangente unitário para a cúbica retorcida do exemplo anterior.

Solução: Como $\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$, então

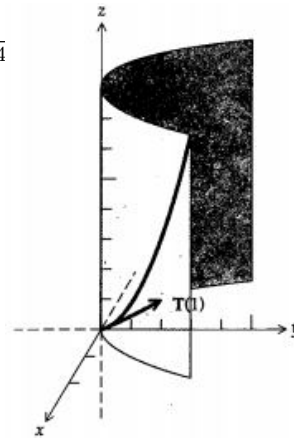
$$\frac{d}{dt}\mathbf{R}(t) = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k} \quad \|\mathbf{R}'(t)\| = \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}$$

Assim,

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{R}'(t)}{\|\mathbf{R}'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}}(\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}).$$

Em particular,

$$\mathbf{T}(1) = \frac{1}{\sqrt{14}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{14}}\mathbf{j} + \frac{3}{\sqrt{14}}\mathbf{k}.$$



Os teoremas relativos às derivadas de somas e produtos de duas funções com valores vetoriais que vimos anteriormente também são válidos em três dimensões.

O teorema a seguir relativo a derivada do produto vetorial de duas funções com valores vetoriais é similar à fórmula de derivação do produto de duas funções de uma variável real; porém é importante manter a ordem correta das funções com valores vetoriais pois o produto vetorial não é comutativo.

Teorema 1.5.2

Se \mathbf{R} e \mathbf{Q} forem funções com valores vetoriais, então

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{R}(t) \times \mathbf{Q}(t)] = \mathbf{R}'(t) \times \mathbf{Q}(t) + \mathbf{R}(t) \times \mathbf{Q}'(t). \quad (1.5.1)$$

para todos os valores de t para os quais $\mathbf{R}'(t)$ e $\mathbf{Q}'(t)$ existem.

O comprimento de arco de uma curva C no espaço tridimensional pode ser definido exatamente como no caso de uma curva no plano. Se C for a curva de equações paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$ e $z = h(t)$, f' , g' e h' forem contínuas em um intervalo fechado $[a, b]$ e nenhum par de valores de t resultar em um mesmo ponto em C , então pode-se provar um teorema que estabelece que o comprimento de arco s , da curva C entre o ponto $(f(a), g(a), h(a))$ e o ponto $(f(b), g(b), h(b))$ é determinado por

$$s = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2} dt \quad (1.5.2)$$

Se s for a medida do comprimento de arco C entre o ponto fixo $(f(t_0), g(t_0), h(t_0))$ e um ponto variável $(f(t), g(t), h(t))$ e s crescer com t crescente, então s será uma função de t , dada por

$$s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{[f'(u)]^2 + [g'(u)]^2 + [h'(u)]^2} du$$

Como vimos para curvas planas

$$\frac{ds}{dt} = \|\mathbf{R}'(t)\|$$

e o comprimento de arco, s unidades, dado por (1.5.2), também pode ser determinado por

$$s = \int_a^b \|\mathbf{R}'(t)\| dt. \quad (1.5.3)$$

Exemplo 1.5.4

Dada a hélice circular

$$\mathbf{R}(t) = a \cos t \mathbf{i} + a \sin t \mathbf{j} + t \mathbf{k}$$

onde $a > 0$, encontre o comprimento de arco de $t = 0$ a $t = 2\pi$.

Solução:

$$\mathbf{R}'(t) = (-a \sin t) \mathbf{i} + (a \cos t) \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

Assim,

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-a \sin t)^2 + (a \cos t)^2 + 1} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + 1} dt = 2\pi\sqrt{a^2 + 1}.$$

Então, o comprimento de arco é $2\pi\sqrt{a^2 + 1}$ unidades.

A definição de uma integral indefinida (ou antiderivada) de uma função com valores vetoriais no espaço tridimensional é a mesma que no espaço bidimensional.

Definição 1.5.2

Se \mathbf{Q} for a função com valores vetoriais dada por

$$\mathbf{Q}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$$

então a **integral indefinida de $\mathbf{Q}(t)$** será definida por

$$\int \mathbf{Q}(t) dt = \left(\int f(t) dt \right) \mathbf{i} + \left(\int g(t) dt \right) \mathbf{j} + \left(\int h(t) dt \right) \mathbf{k}. \quad (1.5.4)$$

A justificativa para a definição de primitiva no espaço tridimensional também é uma repetição do que foi feito em duas dimensões.

Um estudo geral de curvas e superfícies usando o Cálculo é dado em um curso de Geometria Diferencial. A discussão anterior é apenas uma breve introdução.

Vamos considerar agora, resumidamente, o movimento de uma partícula ao longo de uma curva no espaço tridimensional. Se o parâmetro t na equação vetorial

$$\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k} \quad (1.5.5)$$

medir o tempo, então a posição em t de uma partícula que se move ao longo da curva C , tendo equação vetorial (1.5.5), será o ponto $P(f(t), g(t), h(t))$. $\mathbf{R}(t)$ será chamado de **vetor posição**. O **vetor velocidade** da partícula é definido como sendo

$$\mathbf{V}(t) = \mathbf{R}'(t) = f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j} + h'(t)\mathbf{k} \quad (1.5.6)$$

enquanto que o **vetor aceleração** da partícula é

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{V}'(t) = f''(t)\mathbf{i} + g''(t)\mathbf{j} + h''(t)\mathbf{k}. \quad (1.5.7)$$

A velocidade e a aceleração escalar de uma partícula em t são os respectivos módulos dos vetores acima.

Como $\|\mathbf{R}'(t)\| = \frac{ds}{dt}$ temos que

$$\|\mathbf{V}(t)\| = \frac{ds}{dt}.$$

• • •

1.5.1. Lista de Exercícios

Nos exercícios de 1 a 5, ache o vetor tangente unitário para a curva tendo a equação vetorial dada.

1. $\mathbf{R}(t) = (t + 1)\mathbf{i} - t^2\mathbf{j} + (1 - 2t)\mathbf{k}$;

2. $\mathbf{R}(t) = \sin 2t\mathbf{i} + \cos 2t\mathbf{j} + 2t^{3/2}\mathbf{k}$;

3. $\mathbf{R}(t) = e^t \cos t\mathbf{i} + e^t \sin t\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}$;

4. $\mathbf{R}(t) = +t^2\mathbf{i} + (t + \frac{1}{3}t^3)\mathbf{j} + (t - \frac{1}{3}t^2)\mathbf{k}$;

5. $\mathbf{R}(t) = 2t \cos t\mathbf{i} + 5t\mathbf{j} + 2t \sin t\mathbf{k}$.

Nos exercícios de 6 a 10, ache o comprimento de arco da curva de t_1 a t_2 .

6. A curva do exercício 1; $t_1 = -1$, $t_2 = 2$.

7. A curva do exercício 2; $t_1 = 0$, $t_2 = 1$.

8. A curva do exercício 3; $t_1 = 0$, $t_2 = 3$.

9. A curva do exercício 4; $t_1 = 0$, $t_2 = 1$.

10. $\mathbf{R}(t) = 4t^{3/2}\mathbf{i} - 3 \sin t\mathbf{j} + 3 \cos t\mathbf{k}$; $t_1 = 0$, $t_2 = 2$.

11. Escreva a equação vetorial da curva de interseção das superfícies $y = e^x$ e $z = xy$.

Nos exercícios de 12 a 14, uma partícula move-se ao longo de uma curva dada. Ache o vetor velocidade, o vetor aceleração e a velocidade escalar em $t = t_1$.

12. $x = t$, $y = \frac{1}{2}t^2$, $z = \frac{1}{3}t^3$; $t_1 = 2$.

13. $x = e^{2t}$, $y = e^{-2t}$, $z = te^{2t}$; $t_1 = 1$.

14. $x = \frac{1}{2}(t^2 + 1)^{-1}$, $y = \ln(1 + t^2)$, $z = \tan^{-1} t$; $t_1 = 1$.

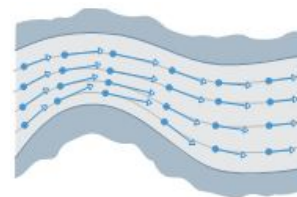
1.6. Campos Vetoriais

O tema principal a partir daqui é o conceito de "fluxo". O ramo da Matemática que estudaremos aqui preocupa-se com a análise de vários tipos de fluxos: por exemplo, o fluxo de um fluido ou o fluxo da eletricidade. Começaremos introduzindo o conceito de campo vetorial, que é a descrição matemática de fluxo. Depois, introduziremos dois novos conceitos de integrais, que são usadas em uma ampla variedade de aplicações para analisar as propriedades de campos vetoriais e de fluxos. Por fim, concluiremos com três teoremas: o Teorema de Green, o Teorema de Stokes e o Teorema da Divergência. Esses teoremas proporcionam uma visão profunda da natureza dos fluxos e constituem a base de muitos dos princípios mais importantes da Física e da Engenharia.

Para motivar as ideias matemáticas que virão a seguir, considere um ponto de massa unitária localizado em qualquer ponto do Universo. De acordo com a Lei da Gravitação Universal de Newton, a Terra exerce uma força atrativa sobre a massa na direção do centro da Terra e de grandeza inversamente proporcional ao quadrado da distância da massa ao centro da Terra (figura ao lado). Essa associação de vetores de força com pontos no espaço é chamada de *campo gravitacional* da Terra.



Uma ideia similar surge no fluxo fluido. Imagine uma corrente em que a água flui horizontalmente em qualquer nível e considere a camada de água em uma profundidade específica. Em cada ponto da camada, a água tem uma certa velocidade, que podemos representar por um vetor naquele ponto (figura ao lado). Essa associação de vetores velocidade com pontos em uma camada bidimensional é denominada *campo de velocidades* nessa camada.



Essas ideias são encampadas nas seguinte definição:

Definição 1.6.1

Um **campo vetorial** em um domínio no plano ou no espaço é uma função que associa um vetor a cada ponto do domínio.

Um campo de vetores tridimensionais pode ter uma expressão do tipo

$$\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + P(x, y, z)\mathbf{k}.$$

O campo é **contínuo** se as **funções componentes** M, N e P são contínuas, **diferenciável** se M, N e P são diferenciáveis, e assim por diante. Um campo de vetores bidimensionais pode ter uma fórmula do tipo

$$\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}.$$

Exemplo 1.6.1

(a) Mostre em uma figura as representações, tendo ponto inicial em (x, y) , dos vetores do campo vetorial

$$\mathbf{F}(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$$

onde x é ± 1 ou ± 2 e y é ± 1 ou ± 2 . (b) Prove que cada representação é tangente a uma circunferência tendo seu centro na origem e um comprimento igual ao raio da circunferência.

Solução: (a) Os vetores do campo $\mathbf{F}(x, y)$ terão como pontos iniciais uma combinação de pares ordenados da forma (x, y) onde x é ± 1 ou ± 2 e y é ± 1 ou ± 2 . Por exemplo, o ponto $(1, 1)$ está associado ao vetor $-\mathbf{i} + \mathbf{j}$; o ponto $(1, -1)$ nos leva ao vetor $\mathbf{i} + \mathbf{j}$; já o ponto $(2, -1)$ resulta no vetor $\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$; e assim por diante (veja a figura ao lado).

(b) Seja

$$\mathbf{R}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$

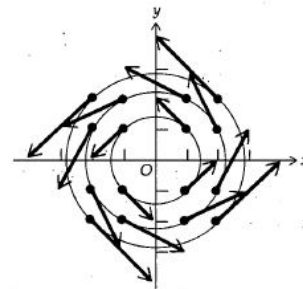
o vetor posição cujo ponto final está em (x, y) . Então,

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(x, y) \cdot \mathbf{F}(x, y) &= (x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \cdot (-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}) \\ &= -xy + xy \\ &= 0 \end{aligned}$$

Portanto, \mathbf{R} e \mathbf{F} são ortogonais. Assim, a representação de \mathbf{F} cujo ponto inicial está em (x, y) é tangente à circunferência com centro na origem e raio $\|\mathbf{R}(x, y)\|$. Como

$$\begin{aligned} \|\mathbf{F}(x, y)\| &= \sqrt{(-y)^2 + x^2} \\ &= \|\mathbf{R}(x, y)\| \end{aligned}$$

o comprimento de cada representação é igual ao raio da circunferência.



Uma classe importante de campos vetoriais surge do processo de calcular gradientes.

Definição 1.6.2

O **campo gradiente** de uma função escalar diferenciável $f(x, y, z)$ é o campo de vetores gradiente

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}.$$

A importância do campo gradiente seguirá da seguinte definição.

Definição 1.6.3

Se \mathbf{F} for um campo definido em um domínio D e $\mathbf{F} = \nabla f$ para alguma função escalar f em uma região aberta D do espaço, então f é chamada de **função potencial** para \mathbf{F} em D . Neste caso, o campo vetorial \mathbf{F} será denominado de **campo conservativo**.

Exemplo 1.6.2

Considere o campo vetorial definido por

$$\mathbf{F}(x, y) = (y^2 + 2x + 4)\mathbf{i} + (2xy + 4y - 5)\mathbf{j}$$

e a função escalar $f(x, y) = y^2x + x^2 + 4x + 2y^2 - 5y$. Note que $\mathbf{F}(x, y) = \nabla f(x, y)$ e assim, \mathbf{F} é um campo vetorial conservativo e f é uma função potencial para o campo \mathbf{F} .

Exemplo 1.6.3

Um exemplo de um campo vetorial em \mathbb{R}^3 decorre da lei do inverso dos quadrados de Newton da atração gravitacional. Essa lei estabelece que a medida da intensidade da força gravitacional entre duas partículas com massas M e m unidades, respectivamente, é

$$\frac{GMm}{d^2}$$

onde G é uma constante gravitacional e d é a distância entre as partículas. Supondo que $m = 1$ e a que partícula de massa M esteja na origem do sistema, podemos representar o campo gravitacional pela função vetorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{-GM}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}).$$

Agora considere a função escalar $V(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$. Então

$$\nabla V(x, y, z) = \frac{-1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}).$$

Assim, se $f(x, y, z) = \frac{GM}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ segue que

$$\nabla f = \mathbf{F}$$

e o campo gravitacional é conservativo tendo f como uma função potencial.

Nos exemplos acima vimos que é relativamente simples provar que um campo \mathbf{F} é conservativo conhecendo uma função potencial dele. Um problema mais difícil é decidir se um dado campo vetorial é conservativo e, se for, achar uma função potencial. Para tal precisamos do seguinte teorema:

Teorema 1.6.1

Seja $\mathbf{F} = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + P(x, y, z)\mathbf{k}$ um campo vetorial em um domínio conexo e simplesmente conexo, cujas funções componentes possuem derivadas parciais de primeira ordem contínuas. Então, \mathbf{F} é conservativo se, e somente se,

$$\frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}, \quad \frac{\partial N}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Mostraremos como encontrar a função potencial para um campo conservativo através de exemplos.

Exemplo 1.6.4

Se \mathbf{F} for um campo definido por

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{1}{y}\mathbf{i} - \frac{x}{y^2}\mathbf{j}$$

prove que \mathbf{F} é conservativo e ache uma função potencial para \mathbf{F} .

Exemplo 1.6.5

Se \mathbf{F} for um campo definido por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (z^2 + 1)\mathbf{i} + 2yz\mathbf{j} + (2xz + y^2)\mathbf{k}$$

prove que \mathbf{F} é conservativo e ache uma função potencial para \mathbf{F} .

Existem dois campos obtidos do campo vetorial \mathbf{F} por meio de derivações parciais. Um deles é o campo vetorial denotado por $\text{rot } \mathbf{F}$ (diz-se *rotacional* de \mathbf{F}) e o outro é o campo escalar denominado *divergente* de \mathbf{F} . Antes de dar as suas definições, mostraremos como o símbolo ∇ (*del*) é usado como um operador. Recordemos que se f for uma função escalar de três variáveis x, y e z , então o gradiente de f será dado por

$$\nabla f(x, y, z) = f_x(x, y, z)\mathbf{i} + f_y(x, y, z)\mathbf{j} + f_z(x, y, z)\mathbf{k}.$$

Denotaremos agora o operador del em três dimensões por

$$\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

Assim, a operação ∇ sobre a função escalar f significa

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}.$$

o que está de acordo com a definição de gradiente de f .

Definição 1.6.4

Seja \mathbf{F} um campo vetorial em uma região aberta D do \mathbb{R}^3 , tal que

$$\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + P(x, y, z)\mathbf{k}.$$

Então, o **rotacional** de \mathbf{F} é definido por

$$\text{rot } \mathbf{F}(x, y, z) = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

se essas derivadas parciais existirem

Uma maneira alternativa de memorizar o cálculo do $\text{rot } \mathbf{F}$ é estender a notação do produto vetorial de dois vetores ao produto vetorial do operador ∇ com o campo vetorial \mathbf{F} e escrever

$$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix}$$

Recordemos que ao utilizarmos a notação de determinante para o produto vetorial, foi ressaltado que nem todos os elementos do determinante eram números reais, ao contrário do usual. No “determinante” acima, a primeira linha é formada por vetores, a segunda linha de operadores de derivação parcial, enquanto que a terceira linha é formada por funções escalares.

Exemplo 1.6.6

Ache o rot \mathbf{F} , se \mathbf{F} for o campo vetorial definido por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = e^{2x}\mathbf{i} + 3x^2yz\mathbf{j} + (2y^2z + x)\mathbf{k}.$$

Solução:

$$\begin{aligned} \text{rot}\mathbf{F}(x, y, z) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ e^{2x} & 3x^2yz & 2y^2z + x \end{vmatrix} \\ &= (4yz - 3x^2y)\mathbf{i} + (0 - 1)\mathbf{j} + (6xyz - 0)\mathbf{k} \\ &= (4yz - 3x^2y)\mathbf{i} - \mathbf{j} + 6xyz\mathbf{k} \end{aligned}$$

Definição 1.6.5

Seja \mathbf{F} um campo vetorial numa região aberta D em \mathbb{R}^3 , tal que

$$\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + P(x, y, z)\mathbf{k}.$$

Então o **divergente** de \mathbf{F} , denotado por $\text{div } \mathbf{F}$, será definido por

$$\text{div } \mathbf{F}(x, y, z) = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}$$

se essas derivadas parciais existirem.

Vamos aplicar a notação do produto escalar de dois vetores ao “produto escalar” do operador ∇ com o campo vetorial \mathbf{F} para calcular o divergente de \mathbf{F} , escrevendo

$$\begin{aligned} \text{div}\mathbf{F} &= \nabla \cdot \mathbf{F} \\ &= \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}) \\ &= \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \end{aligned}$$

Exemplo 1.6.7

Ache o $\text{div } \mathbf{F}$, sendo \mathbf{F} o campo vetorial do exemplo anterior.

Solução:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) &= \nabla \cdot \mathbf{F}(x, y, z) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(e^{2x}) + \frac{\partial}{\partial y}(3x^2yz) + \frac{\partial}{\partial z}(2y^2z + x) \\ &= 2e^{2x} + 3x^2z + 2y^2. \end{aligned}$$

A importância física do rot \mathbf{F} e do div \mathbf{F} no estudo do movimento dos fluidos será discutida nas próximas seções. Aqui estamos interessados apenas em aprender como calculá-los e em provar algumas de suas propriedades.

Teorema 1.6.2

Suponha que \mathbf{F} seja um campo vetorial definido em uma região aberta D em \mathbb{R}^3 , tal que

$$\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + P(x, y, z)\mathbf{k}.$$

Se as derivadas parciais de segunda ordem de M, N e P forem contínuas em D , então

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{F}) = 0.$$

Teorema 1.6.3

Se f for um campo escalar em uma região aberta D do \mathbb{R}^3 e as derivadas parciais de segunda ordem de f forem contínuas em D , então

$$\operatorname{rot}(\nabla f) = \mathbf{0}$$

A expressão no Teorema 1.6.3 estabelece que o rotacional do gradiente de f é igual ao vetor nulo. Consideremos agora o divergente do gradiente de f , isto é, $\nabla \cdot (\nabla f)$, que também pode ser escrito como $\nabla \cdot \nabla f$ ou $\nabla^2 f$.

Por definição,

$$\begin{aligned} \nabla^2 f(x, y, z) &= \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k} \right) \\ \nabla^2 f(x, y, z) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}. \end{aligned}$$

A expressão à direita dessa igualdade é chamada de **Laplaciano** de f . A seguinte equação obtida ao igualarmos a zero o Laplaciano é chamada de **equação de Laplace**:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

Uma função escalar que satisfaça a equação de Laplace é chamada de **harmônica**. Essas equações tem importantes aplicações em Física.

Se \mathbf{F} for um campo vetorial em alguma região aberta D de \mathbb{R}^2 , tal que $\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$, então o rotacional e o divergente de \mathbf{F} em duas dimensões são definidos por

$$\text{rot}\mathbf{F} = \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \mathbf{k} \quad \text{div } \mathbf{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}$$

se essas derivadas parciais existirem. O Laplaciano em duas dimensões é definido por

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Exemplo 1.6.8

Se $\mathbf{F}(x, y) = 3x^2y\mathbf{i} - 2xy^3\mathbf{j}$, ache o rotacional e o divergente de \mathbf{F} .

Solução:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{F}(x, y) &= \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \mathbf{k} \\ &= (-2y^3 - 3x^2)\mathbf{k}. \\ \text{div } \mathbf{F}(x, y) &= \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \\ &= 6xy - 6xy^2. \end{aligned}$$

. . .

1.6.1. Lista de Exercícios

Nos exercícios de 1 a 8, ache um campo vetorial conservativo tendo a função potencial dada.

1. $f(x, y) = 3x^2 + 2y^3$;
2. $f(x, y) = 2x^4 - 5x^2y^2 + 4y^4$;
3. $f(x, y) = \tan^{-1}(x^2y)$;
4. $f(x, y) = ye^x - xe^y$;
5. $f(x, y, z) = 2x^3 - 3x^2y + xy^2 - 4z^3$;
6. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$;
7. $f(x, y, z) = x^2ye^{-4z}$;
8. $f(x, y, z) = z \sin(x^2 - y)$.

Nos exercícios de 9 a 14, determine se o campo vetorial dado é conservativo.

9. $\mathbf{F}(x, y) = (3x^2 - 2y^2)\mathbf{i} + (3 - 4xy)\mathbf{j}$;
10. $\mathbf{F}(x, y) = (e^xe^y + 6e^{2x})\mathbf{i} + (e^xe^y - 2e^y)\mathbf{j}$;
11. $\mathbf{F}(x, y) = y \cos(x + y)\mathbf{i} - x \sin(x + y)\mathbf{j}$;
12. $\mathbf{F}(x, y, z) = (3x^2 - 2yz)\mathbf{i} + (2xz + 6yz)\mathbf{j} + (2xy + 3y^2 - 2z)\mathbf{k}$;
13. $\mathbf{F}(x, y, z) = (2ye^{2x} + e^z)\mathbf{i} + (3ze^{3y} + e^{2x})\mathbf{j} + (xe^z + e^{3y})\mathbf{k}$;
14. $\mathbf{F}(x, y, z) = (y \sec^2x)\mathbf{i} + (\tan x - z \sec^2y)\mathbf{j} + (x \sec z \tan z)\mathbf{k}$.

Nos exercícios de 15 a 22, prove que o campo vetorial é conservativo e ache uma função potencial.

15. $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$;
16. $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$;
17. $\mathbf{F}(x, y) = e^x \sin y\mathbf{i} + e^x \cos y\mathbf{j}$;

$$18. \mathbf{F}(x, y) = (2xy^2 - y^3)\mathbf{i} + (2x^2y - 3xy^2 + 2)\mathbf{j};$$

$$19. \mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 - y)\mathbf{i} + (3z - x)\mathbf{j} + (z + 3y)\mathbf{k};$$

$$20. \mathbf{F}(x, y, z) = (yz)\mathbf{i} + (xz)\mathbf{j} + (xy)\mathbf{k};$$

$$21. \mathbf{F}(x, y, z) = (ze^x + e^y)\mathbf{i} + (xe^y - ez)\mathbf{j} + (-ye^z + e^x)\mathbf{k};$$

$$22. \mathbf{F}(x, y, z) = (2x \cos y - 3)\mathbf{i} - (x^2 \sin y + z^2)\mathbf{j} - (2yz - 2)\mathbf{k}.$$

Nos exercícios de 23 a 30, ache $\text{rot } \mathbf{F}$ e $\text{div } \mathbf{F}$ para o campo vetorial dado.

$$23. \mathbf{F}(x, y) = 2x\mathbf{i} + 3y\mathbf{j};$$

$$24. \mathbf{F}(x, y) = \cos x\mathbf{i} - \sin y\mathbf{j};$$

$$25. \mathbf{F}(x, y) = e^x \cos y\mathbf{i} + e^x \sin y\mathbf{j};$$

$$26. \mathbf{F}(x, y) = -\frac{y}{x}\mathbf{i} + \frac{1}{x}\mathbf{j};$$

$$27. \mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k};$$

$$28. \mathbf{F}(x, y, z) = (xz^2)\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + (x^2z)\mathbf{k};$$

$$29. \mathbf{F}(x, y, z) = \cos y\mathbf{i} + \cos z\mathbf{j} + \cos x\mathbf{k};$$

$$30. \mathbf{F}(x, y, z) = (y^2 + z^2)\mathbf{i} + (xe^y \cos z)\mathbf{j} - (xe^y \cos z)\mathbf{k}.$$

1.7. Integrais de linha

Para calcular a massa total de um fio ao longo de uma curva no espaço, ou para encontrar o trabalho realizado por uma força variável agindo ao longo dessa curva, precisamos de uma noção mais geral de integral do que a definição de integrais de uma variável. Precisamos integrar sobre uma curva C e não sobre um intervalo $[a, b]$. Essas integrais mais gerais são denominadas *integrais de linha*. Faremos nossas definições para curvas no espaço, com curvas no plano xy sendo o caso especial com coordenada z identicamente zero.

Suponha que $f(x, y, z)$ seja uma função de valores reais que desejamos integrar sobre a curva C que está dentro do domínio de f e parametrizada por $\mathbf{R}(t) = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j} + k(t)\mathbf{k}$, $a \leq t \leq b$. Os valores de f ao longo da curva são fornecidos pela função composta $f(g(t), h(t), k(t))$. Vamos integrar essa composta com relação ao comprimento de arco de $t = a$ a $t = b$. Para começar, primeiro particionamos a curva C em um número finito de n subarcos. O subarco típico tem comprimento Δs_k . Em cada subarco escolhemos um ponto (x_k, y_k, z_k) e formamos a soma

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z_k) \Delta s_k$$

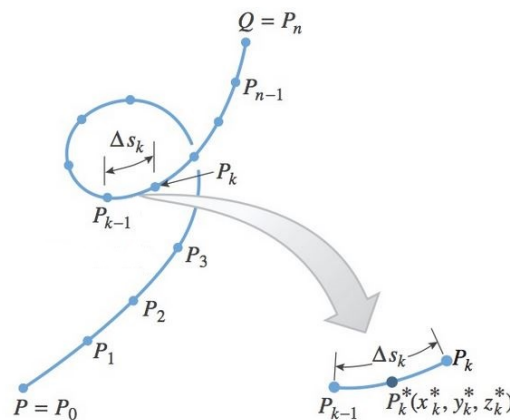
que é semelhante a uma soma de Riemann. Dependendo de como particionamos a curva C e selecionamos o ponto (x_k, y_k, z_k) do k -ésimo subarco, podemos obter valores diferentes para S_n . Se f é contínua e as funções g, h e k tem derivadas de primeira ordem, então essa somas se aproximam de um limite à medida que n cresce e os comprimentos Δs_k se aproximam de zero. O limite fornece a definição a seguir, semelhante àquela para uma integral simples. Na definição, consideramos que $\Delta s_k \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

Definição 1.7.1

Se f é definida em uma curva C fornecida parametricamente por $\mathbf{R}(t) = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j} + k(t)\mathbf{k}$, $a \leq t \leq b$, então a **integral de linha de f sobre C** é

$$\int_C f(x, y, z) ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z_k) \Delta s_k, \quad (1.7.1)$$

desde que esse limite exista.



Se a curva C é lisa para $a \leq t \leq b$ e a função f é contínua em C , então pode ser

provado que o limite da igualdade (1.7.1) existe. Podemos então aplicar o Teorema Fundamental do Cálculo para derivar a equação de comprimento de arco

$$s(t) = \int_a^t \|\mathbf{R}'(\tau)\| d\tau,$$

para expressar ds na igualdade (1.7.1) como $ds = \|\mathbf{R}'(t)\| dt$ e calcular a integral de f sobre C por

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f(g(t), h(t), k(t)) \|\mathbf{R}'(t)\| dt. \quad (1.7.2)$$

Observe que a integral do lado direito de (1.7.2) é somente uma integral definida conforme definido no Cálculo 1, onde estamos integrando com relação ao parâmetro t . A expressão à esquerda da igualdade (1.7.2) calcula a integral de linha do lado esquerdo corretamente, não importa qual a parametrização utilizada, contanto que a parametrização seja lisa. Observe que o parâmetro t define uma direção ao longo da trajetória. O ponto inicial em C é a posição $\mathbf{R}(a)$ e o movimento ao longo da trajetória é na direção de t crescente.

Se f tem o valor constante 1, então a integral de f sobre C fornece o comprimento de C de $t = a$ a $t = b$.

Exemplo 1.7.1

Usando a parametrização dada, calcule a integral de linha $\int_C (1 + xy^2) ds$.

(a) $C : \mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 1.$

(b) $C : \mathbf{R}(t) = (1 - t)\mathbf{i} + (2 - 2t)\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 1.$

Solução: (a) Como $\mathbf{R}'(t) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, temos $\|\mathbf{R}'(t)\| = \sqrt{5}$ e, da expressão (1.7.2), decorre que

$$\begin{aligned} \int_C (1 + xy^2) ds &= \int_0^1 [1 + t(2t)^2] \sqrt{5} dt \\ &= \int_0^1 [1 + 4t^3] \sqrt{5} dt = \sqrt{5} [t + t^4]_0^1 = 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

(b) Como $\mathbf{R}'(t) = -\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$, temos $\|\mathbf{R}'(t)\| = \sqrt{5}$ e, da expressão (1.7.2), decorre que

$$\begin{aligned} \int_C (1 + xy^2) ds &= \int_0^1 [1 + (1 - t)(2 - 2t)^2] \sqrt{5} dt \\ &= \int_0^1 [1 + 4(1 - t)^3] \sqrt{5} dt = \sqrt{5} [t - (1 - t)^4]_0^1 = 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

Observe que as integrais nas partes (a) e (b) do exemplo acima são iguais, embora as parametrizações correspondentes de C tenham orientações opostas. Isso ilustra o resultado importante de que uma integral de linha de f em relação a s ao longo de C não depende da orientação escolhida de C .

Exemplo 1.7.2

Integre $f(x, y, z) = x - 3y^2 + z$ sobre o segmento de reta C que une a origem ao ponto $(1, 1, 1)$.

Solução: Escolhemos a parametrização mais simples possível:

$$C : \mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

Assim $\mathbf{R}'(t) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\|\mathbf{R}'(t)\| = \sqrt{3}$ e

$$\int_C (x - 3y^2 + z) ds = \int_0^1 (2t - t^3)\sqrt{3} dt = [t^2 - t^3]_0^1 = 0.$$

As integrais de linha tem a propriedade de que se uma curva C for feita ligando-se um número finito de curvas C_1, C_2, \dots, C_n pelas extremidades, então a integral de uma função sobre C é a soma das integrais sobre as curvas que a compõem.

$$\int_C f ds = \int_{C_1} f ds + \int_{C_2} f ds + \dots + \int_{C_n} f ds. \quad (1.7.3)$$

Exemplo 1.7.3

Integre $f(x, y, z) = x - 3y^2 + z$ sobre os segmentos de reta C_1 , que liga a origem ao ponto $(1, 1, 0)$, e C_2 , que une $(1, 1, 0)$ ao ponto $(1, 1, 1)$.

Solução: As parametrizações mais simples para C_1 e C_2 são:

$$\begin{aligned} C_1 : \mathbf{R}_1(t) &= t\mathbf{i} + t\mathbf{j}, & 0 \leq t \leq 1; & & \|\mathbf{R}_1(t)\| &= \sqrt{2}. \\ C_2 : \mathbf{R}_2(t) &= \mathbf{i} + \mathbf{j} + t\mathbf{k}, & 0 \leq t \leq 1; & & \|\mathbf{R}_2(t)\| &= 1. \end{aligned}$$

Com essas parametrizações calculamos

$$\begin{aligned} \int_{C=C_1 \cup C_2} (x - 3y^2 + z) ds &= \int_{C_1} (x - 3y^2 + z) ds + \int_{C_2} (x - 3y^2 + z) ds \\ &= \int_0^1 (t - 3t^2)\sqrt{2} dt + \int_0^1 (1 - 3 + t)(1) dt \\ &= \sqrt{2} \left[\frac{t^2}{2} - t^3 \right]_0^1 + \left[\frac{t^2}{2} - 2t \right]_0^1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

É importante notar que as integrais sobre C e $C_1 \cup C_2$ tem valores diferentes embora as duas curvas liguem a origem ao ponto $(1, 1, 1)$. Para a maioria das funções, o valor da integral ao longo de um caminho ligando dois pontos varia se o caminho entre eles variar. Para algumas funções, entretanto, o valor permanece o mesmo, como veremos mais adiante.

Exemplo 1.7.4

Suponha que um arame semicircular tenha a equação $y = \sqrt{25 - x^2}$ e que a sua densidade de massa seja $\delta(x, y) = 15 - y$. Fisicamente, isso significa que o arame tem uma densidade máxima de 15 unidades na base ($y = 0$) e que a densidade do arame decresce linearmente em relação a y para um valor de 10 unidades no topo ($y = 5$). Calcule a massa do arame.

Solução: A massa M do arame pode ser expressa como a integral de linha

$$M = \int_C \delta(x, y) ds = \int_C (15 - y) ds$$

ao longo do semicírculo C . Para calcular essa integral, expressamos C parametrizada como

$$x = 5 \cos t, \quad y = 5 \sin t, \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

Assim,

$$\begin{aligned} M &= \int_C (15 - y) ds = \int_0^\pi (15 - 5 \sin t) \sqrt{(-5 \sin t)^2 + (5 \cos t)^2} dt \\ &= 5 \int_0^\pi (15 - 5 \sin t) dt \\ &= 5 [15t + 5 \cos t]_0^\pi \\ &= 75\pi - 50 \text{ unidades de massa.} \end{aligned}$$

• • •

1.7.1. Lista de Exercícios

1. Calcule $\int_C (x+y) ds$ onde C é o segmento de reta $x = t, y = 1-t, z = 0$ de $(0, 1, 0)$ a $(1, 0, 0)$.
2. Calcule $\int_C (xy+y+z) ds$ ao longo da curva $\mathbf{R}(t) = 2t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + (2-2t)\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 1$.
3. Encontre a integral de linha de $f(x, y, z) = x + y + z$ sobre o segmento de reta de $(1, 2, 3)$ a $(0, -1, 1)$.
4. Calcule $\int_C (x+y) ds$ onde C é o segmento de reta $x = t, y = 1-t, z = 0$ de $(0, 1, 0)$ a $(1, 0, 0)$.
5. Integre $f(x, y, z) = (x+y+z)/(x^2+y^2+z^2)$ sobre o caminho $\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $0 < a \leq t \leq b$.
6. Integre $f(x, y, z) = -\sqrt{x^2+z^2}$ sobre a circunferência

$$\mathbf{R}(t) = (a \cos t)\mathbf{i} + (a \sin t)\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Nos exercícios 7 a 10, integre f sobre a curva dada.

7. $f(x, y) = x^3/y$, $C : y = x^2/2$, $0 \leq x \leq 2$.
8. $f(x, y) = (x+y^2)/\sqrt{1+x^2}$, $C : y = x^2/2$, de $(1, 1/2)$ a $(0, 0)$.
9. $f(x, y) = x + y$, $C : y = x^2 + y^2 = 4$ no primeiro quadrante de $(2, 0)$ a $(0, 2)$.
10. $f(x, y) = x^2 - y$, $C : y = x^2 + y^2 = 4$ no primeiro quadrante de $(0, 2)$ a $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$.
11. Calcule $\int_C \sqrt{x^2+y^2} ds$ ao longo da curva $\mathbf{R}(t) = (4 \cos t)\mathbf{i} + (4 \sin t)\mathbf{j} + (3t)\mathbf{k}$, $-2\pi \leq t \leq 2\pi$.
12. Encontre a massa de um arame que está sobre a curva $\mathbf{R}(t) = (t^2 - 1)\mathbf{j} + (2t)\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 1$, se a densidade for $\delta(t) = \frac{3t}{2}$.
13. Encontre a massa de um fio fino que se encontra ao longo da curva $\mathbf{R}(t) = \sqrt{2}t\mathbf{i} + \sqrt{2}t\mathbf{j} + (4-t^2)\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 1$, se a densidade for **(a)** $\delta = 3t$ e **(b)** $\delta = 1$.

1.8. Trabalho como uma Integral de Linha

Na seção anterior definimos a integral de linha de uma função escalar $f(x, y, z)$ ao longo de uma curva C . Agora queremos calcular a integral de linha de um campo vetorial \mathbf{F} ao longo de C .

Suponha que o campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + P(x, y, z)\mathbf{k}$ tenha componentes contínuas e represente uma força em uma região do espaço (que pode ser a força da gravidade ou uma força eletromagnética) e que a curva C tenha uma parametrização lisa $\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$, $a \leq t \leq b$. Como vimos, a parametrização $\mathbf{R}(t)$ define uma orientação ao longo de C . Em cada ponto ao longo da trajetória C , o vetor tangente $\mathbf{T}(t) = \frac{d\mathbf{R}}{ds} = \frac{\mathbf{V}}{\|\mathbf{V}\|}$ é um vetor unitário tangente à trajetória e apontando na direção do deslocamento da partícula. Intuitivamente, a integral de linha do campo vetorial é a integral de linha da componente escalar tangencial de \mathbf{F} ao longo de C . Esse componente tangencial é fornecido pelo produto escalar

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{R}}{ds}$$

de forma que temos a seguinte definição formal, onde $f = \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$ na definição de integral de linha dada anteriormente.

Definição 1.8.1

Seja \mathbf{F} um campo vetorial com componentes contínuos definidos ao longo de uma curva lisa C parametrizada por $\mathbf{R}(t)$, $a \leq t \leq b$. Então, a **integral de linha de \mathbf{F} ao longo de C** é

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds = \int_C \left(\mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{R}}{ds} \right) ds = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$$

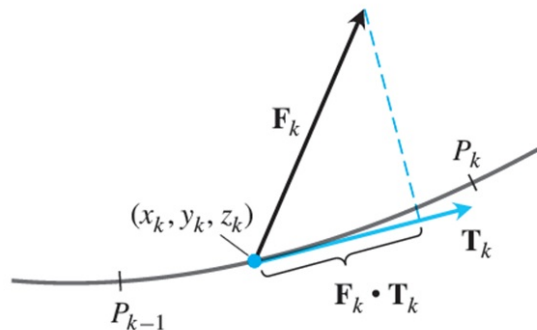
A integral acima representa fisicamente o **trabalho** W realizado por uma força \mathbf{F} sobre uma curva lisa $\mathbf{R}(t)$ de $t = a$ a $t = b$.

Chegamos à integral da definição acima da mesma forma que se define a fórmula do trabalho realizado por uma força contínua de magnitude $F(x)$, isto é, $W = \int_a^b F(x)dx$, direcionada ao longo do eixo x .

Dividimos a curva em pequenos segmentos, aplicamos a fórmula da força vezes a distância para aproximar o trabalho em cada segmento de curva, somamos tudo para aproximar o trabalho na curva toda e calculamos o trabalho como o limite das somas de aproximação à medida que os segmentos se tornam mais curtos e numerosos.

Para descobrirmos exatamente qual deve ser a integral-limite, dividimos o intervalo de parâmetro $[a, b]$ da maneira usual e escolhemos um ponto c_k em cada subintervalo $[t_k, t_{k+1}]$. A divisão de $[a, b]$ determina uma divisão da curva, sendo P_k a extremidade do vetor $\mathbf{R}(t_k)$ e sendo Δs_k o comprimento do segmento de curva $P_k P_{k+1}$.

Se \mathbf{F}_k denota o valor de \mathbf{F} no ponto da curva correspondente a $t = c_k$ e se \mathbf{T}_k denota o vetor tangente unitário à curva nesse ponto, então $\mathbf{F}_k \cdot \mathbf{T}_k$ é o componente escalar de \mathbf{F} na direção de \mathbf{T} em $t = c_k$.



O trabalho realizado por \mathbf{F} ao longo do segmento de curva $P_k P_{k+1}$ é aproximadamente

$$\mathbf{F}_k \cdot \mathbf{T}_k \Delta s_k.$$

O trabalho realizado por \mathbf{F} ao longo da curva de $t = a$ a $t = b$ é aproximadamente

$$\sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{T}_k \Delta s_k.$$

À medida que a norma da divisão de $[a, b]$ se aproxima de zero, a norma da divisão induzida na curva se aproxima de zero e essas somas se aproximam da integral de linha

$$\int_{t=a}^{t=b} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds.$$

O sinal do número que calculamos com essa integral depende do sentido no qual a curva é percorrida quando t aumenta. Se trocarmos o sentido do movimento, trocamos o sentido de \mathbf{T} e mudamos o sinal de $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$ e de sua integral.

As igualdades abaixo mostram seis maneiras de escrever a integral do trabalho que acabamos de definir. Apesar de terem notações diferentes, todas as integrais são

calculadas da mesma maneira.

$$\begin{aligned}
 W &= \int_{t=a}^{t=b} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds && \text{A definição.} \\
 &= \int_{t=a}^{t=b} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} && \text{Forma diferencial compacta.} \\
 &= \int_a^b \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{R}}{dt} \, dt && \text{Expandida para incluir o } dt; \text{ enfatiza o} \\
 & && \text{parâmetro } t \text{ e o vetor velocidade } d\mathbf{R}/dt. \\
 &= \int_a^b \left(M \frac{df}{dt} + N \frac{dg}{dt} + P \frac{dh}{dt} \right) dt && \text{Enfatiza as funções componentes.} \\
 &= \int_a^b \left(M \frac{dx}{dt} + N \frac{dy}{dt} + P \frac{dz}{dt} \right) dt && \text{Abrevia as componentes de } \mathbf{R}. \\
 &= \int_a^b M \, dx + N \, dy + P \, dz && \text{Os } dt \text{ são cancelados; é a forma mais comum.}
 \end{aligned}$$

Exemplo 1.8.1

Suponha que uma partícula se move ao longo da parábola $y = x^2$ do ponto $(-1, 1)$ ao ponto $(2, 4)$. Ache o trabalho total realizado, se o movimento for causado por um campo de forças $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + 3x^2y\mathbf{j}$. Suponha que os arcos são medidos em metros e a força em newtons.

Solução: As equações paramétricas da parábola são

$$x = t \quad \text{e} \quad y = t^2 \quad -1 \leq t \leq 2.$$

Assim, uma equação vetorial da parábola é

$$\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} \quad \text{e} \quad \mathbf{R}'(t) = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j}.$$

Como $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + 3x^2y\mathbf{j}$, então

$$\mathbf{F}(\mathbf{R}(t)) = (t^2 + t^4)\mathbf{i} + 3t^4\mathbf{j}$$

Se W for o trabalho realizado, então

$$\begin{aligned} W &= \int_{-1}^2 \mathbf{F}(\mathbf{R}(t)) \cdot \mathbf{R}'(t) dt \\ &= \int_{-1}^2 ((t^2 + t^4)\mathbf{i} + 3t^4\mathbf{j}) \cdot (\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}) dt \\ &= \int_{-1}^2 (t^2 + t^4 + 6t^5) dt = \frac{363}{5}. \end{aligned}$$

Logo, o trabalho realizado é $\frac{363}{5}$ joules.

Exemplo 1.8.2

Encontre o trabalho realizado por $\mathbf{F} = e^x\mathbf{i} + xe^z\mathbf{j} + x\sin(\pi y^2)\mathbf{k}$ sobre a curva $\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 1$. Suponha que o arco seja medido em metros e a força em newtons.

Solução:

$$\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R}'(t) = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}$$

Como $\mathbf{F}(x, y, z) = e^x\mathbf{i} + xe^z\mathbf{j} + x\sin(\pi y^2)\mathbf{k}$, então

$$\mathbf{F}(\mathbf{R}(t)) = e^t\mathbf{i} + te^{t^3}\mathbf{j} + t\sin(\pi t^4)\mathbf{k}$$

Se W joules for o trabalho realizado, então,

$$\begin{aligned}
 W &= \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} \\
 &= \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{R}(t)) \cdot \mathbf{R}'(t) dt \\
 &= \int_0^1 (e^t \mathbf{i} + te^{t^3} \mathbf{j} + t \sin(\pi t^4) \mathbf{k}) \cdot (\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2 \mathbf{k}) dt \\
 &= \int_0^1 (e^t + 2t^2 e^{t^3} + 3t^3 \sin(\pi t^4)) dt \\
 &= \left[e^t + \frac{2}{3} e^{t^3} - \frac{3}{4\pi} \cos(\pi t^4) \right]_0^1 \\
 &= e + \frac{2}{3} e - \frac{3}{4\pi} \cos \pi - 1 - \frac{2}{3} + \frac{3}{4\pi} \cos 0 \\
 &= \frac{5}{3} e + \frac{3}{2\pi} - \frac{5}{3}.
 \end{aligned}$$

Logo, o trabalho realizado é $\left[\frac{5}{3}(e - 1) + \frac{3}{2\pi} \right]$ J.

Exemplo 1.8.3

Calcule a integral de linha

$$\int_C 3x dx + 2xy dy + z dz$$

se a curva C for a hélice circular definida pelas equações paramétricas

$$x = \cos t \quad y = \sin t \quad z = t \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Solução: Da notação com forma diferencial para uma integral de linha

$$\begin{aligned}
 \int_C 3x \, dx + 2xy \, dy + z \, dz &= \int_0^{2\pi} 3 \cos t (-\sin t \, dt) + 2(\cos t)(\sin t)(\cos t \, dt) + t \, dt \\
 &= \int_0^{2\pi} (-3 \cos t \sin t + 2 \cos^2 t \sin t + t) \, dt \\
 &= \left[-\frac{3}{2} \sin^2 t - \frac{2}{3} \cos^3 t + \frac{1}{2} t^2 \right]_0^{2\pi} \\
 &= 2\pi^2
 \end{aligned}$$

• • •

1.8.1. Lista de Exercícios

Nos exercícios de 01 a 13, ache o trabalho total realizado pelo campo de forças dado sobre uma partícula que percorre o arco de curva C . Suponha que o arco seja medido em metros e a força em newtons.

1. $\mathbf{F}(x, y) = 2xy\mathbf{i} + (x^2 + y^2)\mathbf{j}$; C é o segmento de reta da origem ao ponto $(1, 1)$.
2. $\mathbf{F}(x, y) = 2xy\mathbf{i} + (x^2 + y^2)\mathbf{j}$; C é o arco da parábola $y^2 = x$, da origem ao ponto $(1, 1)$.
3. $\mathbf{F}(x, y) = (y - x)\mathbf{i} + (x^2y)\mathbf{j}$; C é o segmento de reta do ponto $(1, 1)$ a $(2, 4)$.
4. $\mathbf{F}(x, y) = (y - x)\mathbf{i} + (x^2y)\mathbf{j}$; C é o arco da parábola $y = x^2$, do ponto $(1, 1)$ a $(2, 4)$.
5. $\mathbf{F}(x, y) = (y - x)\mathbf{i} + (x^2y)\mathbf{j}$; C é o segmento de reta do ponto $(1, 1)$ a $(2, 2)$ e, a seguir, o segmento de reta de $(2, 2)$ a $(2, 4)$.
6. $\mathbf{F}(x, y) = -x^2y\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}$; C é o segmento de reta do ponto $(a, 0)$ a $(0, a)$.
7. $\mathbf{F}(x, y) = -x^2y\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}$; $C: \mathbf{R}(t) = s \cos t\mathbf{i} + a \sin t\mathbf{j}, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.
8. $\mathbf{F}(x, y, z) = (y + z)\mathbf{i} + (x + z)\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}$; C é o segmento de reta da origem ao ponto $(1, 1, 1)$.
9. $\mathbf{F}(x, y, z) = z^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$; C é o segmento de reta da origem ao ponto $(4, 0, 3)$.
10. $\mathbf{F}(x, y, z) = e^x\mathbf{i} + e^y\mathbf{j} + e^z\mathbf{k}$; $C: \mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}, 0 \leq t \leq 2$.
11. $\mathbf{F}(x, y, z) = (xyz + x)\mathbf{i} + (x^2z + y)\mathbf{j} + (x^2z + y)\mathbf{k}$; $C: \mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}, 0 \leq t \leq 2$.
12. $\mathbf{F}(x, y, z) = (xyz + x)\mathbf{i} + (x^2z + y)\mathbf{j} + (x^2z + y)\mathbf{k}$; C : o segmento de reta da origem ao ponto $(1, 0, 0)$; a seguir, o segmento de reta de $(1, 0, 0)$ a $(1, 1, 0)$; daí o segmento de reta de $(1, 0, 0)$ a $(1, 1, 1)$.
13. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (yz - x)\mathbf{k}$; $C: \mathbf{R}(t) = 2t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + 4t^3\mathbf{k}, 0 \leq t \leq 1$.

1.9. Integrais de Linha Independentes do Caminho

Vimos que o valor de uma integral de linha é determinado pelo integrando e pela curva C ligando dois pontos A e B . Sob certas circunstâncias pode ocorrer de o valor da integral depender apenas do integrando e dos pontos A e B e não do caminho ligando A a B . Tal integral de linha é denominada de **independente do caminho**.

Exemplo 1.9.1

Suponha que o campo de forças

$$\mathbf{F}(x, y) = (y^2 + 2x + 4)\mathbf{i} + (2xy + 4y - 5)\mathbf{j}$$

mova uma partícula da origem ao ponto $(1, 1)$. Vamos mostrar que o trabalho total realizado será o mesmo, se o caminho for ao longo **(a)** do segmento e reta da origem ao ponto $(1, 1)$; **(b)** do segmento da parábola $y = x^2$ da origem a $(1, 1)$ e **(c)** do segmento da curva $x = y^3$ da origem a $(1, 1)$.

Solução: Se W for a medida do trabalho realizado, então

$$W = \int_C (y^2 + 2x + 4)dx + (2xy + 4y - 5)dy \quad (1.9.1)$$

(a) Uma equação para C é $y = x$. Usamos x como parâmetro e expressamos $y = x$ e $dy = dx$ em (1.9.1). Então,

$$\begin{aligned} W &= \int_0^1 (x^2 + 2x + 4) dx + (2x^2 + 4x - 5) dx \\ &= \int_0^1 (3x^2 + 6x - 1) dx \\ &= x^3 + 3x^2 - x \Big|_0^1 = 3. \end{aligned}$$

(b) Uma equação de C é $y = x^2$. Novamente tomando x como parâmetro e em (1.9.1), expressando $y = x^2$ e $dy = 2x dx$, temos

$$\begin{aligned} W &= \int_0^1 (x^4 + 2x + 4) dx + (2x^3 + 4x^2 - 5)2x dx \\ &= \int_0^1 (5x^4 + 8x^3 - 8x + 4) dx \\ &= x^5 + 2x^4 - 4x^2 + 4x \Big|_0^1 = 3. \end{aligned}$$

(c) Uma equação de C é $x = y^3$. Tomando y como parâmetro e em (1.9.1), expressando $x = y^3$ e $dx = 3y^2 dy$, temos

$$\begin{aligned} W &= \int_0^1 (y^2 + 2y^3 + 4) 3y^2 dy + (2y^4 + 4y - 5) dy \\ &= \int_0^1 (6y^5 + 5y^4 + 12y^2 + 4y - 5) dy \\ &= y^6 + y^5 + 4y^3 + 2y^2 - 5y \Big|_0^1 = 3. \end{aligned}$$

Teorema 1.9.1

Seja C uma curva lisa por partes, contida numa região aberta D ligando o ponto A ao ponto B . Se \mathbf{F} for um campo vetorial conservativo em D e f for uma função potencial para \mathbf{F} , então a integral de linha

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$$

será independente do caminho C e

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = f(B) - f(A).$$

Devido a semelhança desse teorema com o Segundo Teorema Fundamental do Cálculo, ele é chamado, às vezes, de **teorema fundamental para integrais de linha**.

Exemplo 1.9.2

Vamos usar o teorema acima para calcular o trabalho do exemplo anterior. Lembre-se que mostramos em outra seção que o campo vetorial \mathbf{F} dado no exemplo é conservativo e que $f(x, y) = y^2x + x^2 + 4x + 2y^2 - 5y$ é uma função potencial para o campo.

Solução:

$$W = \int_C (y^2 + 2x + 4)dx + (2xy + 4y - 5)dy = f(1, 1) - f(0, 0) = 3 - 0 = 3.$$

Exemplo 1.9.3

Calcule a integral de linha

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$$

se $\mathbf{F}(x, y) = (e^{-y} - 2x)\mathbf{i} - (xe^{-y} + \sin y)\mathbf{j}$ e C for o arco no primeiro quadrante da circunferência

$$\mathbf{R}(t) = \pi \cos t \mathbf{i} + \pi \sin t \mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

Solução:

Se o valor de uma integral de linha for independente do caminho, não será necessário encontrar uma função potencial f .

Exemplo 1.9.4

Se $\mathbf{F}(x, y) = \frac{1}{y}\mathbf{i} - \frac{x}{y^2}\mathbf{j}$ e C for qualquer curva lisa por partes do ponto $(5, -1)$ ao ponto $(9, -3)$, mostre que o valor da integral de linha

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$$

é independente do caminho e calcule-a.

Solução: Mostramos na seção anterior que o campo dado é conservativo. Logo a integral pedida é independente do caminho. Tomamos então, como caminho, o segmento de reta de $(5, -1)$ a $(9, -3)$. Uma equação vetorial para a reta em questão é $\mathbf{R}(t) = (3 + 2t)\mathbf{i} - t\mathbf{j}$, $1 \leq t \leq 3$ e calculamos a integral de linha usando a definição.

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} &= \int_1^3 \mathbf{F}(3 + 2t, -t) \cdot (2\mathbf{i} - \mathbf{j}) dt \\ &= \int_1^3 \left(-\frac{1}{t}\mathbf{i} - \frac{3 + 2t}{t^2} \right) \cdot (2\mathbf{i} - \mathbf{j}) dt \\ &= \int_1^3 \left(-\frac{2}{t} + \frac{3 + 2t}{t^2} \right) dt \\ &= \int_1^3 \left(\frac{3}{t^2} \right) dt \\ &= -\frac{3}{t} \Big|_1^3 = 2. \end{aligned}$$

Exemplo 1.9.5

Mostre que a integral de linha

$$\int_C (4x + 2y - z) dx + (2x - 2y + z) dy + (-x + y + 2z) dz$$

é independente do caminho e calcule a integral, se C for qualquer curva lisa por partes de $(4, -2, 1)$ a $(-1, 2, 0)$.

Solução:

Se C for a curva definida pela equação vetorial

$$\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}, \quad a \leq t \leq b$$

cujo o ponto inicial $A(f(a), g(a), h(a))$ e o ponto final $B(f(b), g(b), h(b))$ coincidem, então a curva C é dita **fechada**.

Teorema 1.9.2

Se C for qualquer curva fechada lisa por partes, contida em uma região aberta D e se \mathbf{F} for um campo conservativo em D , então

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = 0.$$

Exemplo 1.9.6

Uma partícula movimenta-se sobre a circunferência

$$\mathbf{R}(t) = 2 \cos t \mathbf{i} + 2 \sin t \mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Ache o trabalho total realizado pelo campo de forças

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(4 \ln(3y) + \frac{1}{x} \right) \mathbf{i} + \frac{4x}{y} \mathbf{j}$$

Solução: Seja

$$M = 4 \ln(3y) + \frac{1}{x} \quad N = \frac{4x}{y}$$

$$M_y = \frac{4}{y} \quad N_x = \frac{4}{y}$$

Como $M_y(x, y) = N_x(x, y)$ o campo \mathbf{F} é conservativo. Além disso, C é uma curva fechada, Logo, se W for a medida do trabalho realizado, temos

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = 0.$$

• • •

1.9.1. Lista de Exercícios

Nos exercícios de 01 a 06, mostre que o valor da integral de linha $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$ para os dados \mathbf{F} e C é independente do caminho e calcule a integral.

1. $\mathbf{F}(x, y) = 2(x - y)\mathbf{i} + 2(3y - x)\mathbf{j}$; C é o arco do primeiro quadrante da circunferência $x^2 + y^2 = 9$, do ponto sobre o eixo x ao ponto sobre o eixo y .

2. $\mathbf{F}(x, y) = (3x^2 + 6xy - 2y^2)\mathbf{i} + (3x^2 - 4xy + 3y^2)\mathbf{j}$; C é o arco da do primeiro quadrante da elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$, do ponto sobre o eixo x ao ponto sobre o eixo y .

3. $\mathbf{F}(x, y) = (4e^{2x} - 3e^x e^y)\mathbf{i} + (2e^{2y} - 3e^x e^y)\mathbf{j}$; C é o arco da parábola $y^2 = 4x$, do vértice ao ponto de interseção entre a parábola e a corda que passa pelo foco e é paralela à diretriz, no primeiro quadrante.

4. $\mathbf{F}(x, y, z) = (2x)\mathbf{i} + (3y^2)\mathbf{j} + \mathbf{k}$; C é o traço da elipsoide $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 9$, no plano xz , do eixo x positivo ao eixo z positivo.

5. $\mathbf{F}(x, y, z) = (2xy + z^2)\mathbf{i} + (x^2 - 2yz)\mathbf{j} + (2xz - y^2)\mathbf{k}$; C é o traço da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, no plano yz , do eixo y positivo ao eixo z positivo.

6. $\mathbf{F}(x, y, z) = 2ye^{2x}\mathbf{i} + e^{2x}\mathbf{j} + 3z^2\mathbf{k}$; C é qualquer curva lisa por partes ligando o ponto $(\ln 2, 1, 1)$ ao ponto $(\ln 2, 2, 2)$.

Nos exercícios de 07 a 09, ache o trabalho total realizado pelo campo de forças \mathbf{F} ao deslocar uma partícula ao longo de um arco da curva C dada. Suponha que o arco seja medido em metros e a força seja medida em newtons. (Sugestão: primeiro mostre que \mathbf{F} é conservativo),

7. $\mathbf{F}(x, y) = 3(x + y)^2\mathbf{i} + 3(x + y)^2\mathbf{j}$; C : o arco da parábola $y = x^2$ do vértice ao ponto $(2, 4)$.

8. $\mathbf{F}(x, y) = (2xy - 5y + 2y^2)\mathbf{i} + (x^2 - 5x + 4xy)\mathbf{j}$; C : é o quarto da circunferência $\mathbf{R}(t) = 2 \cos t\mathbf{i} + 2 \sin t\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq \pi/2$.

9. $\mathbf{F}(x, y, z) = 4y^2z\mathbf{i} + 8xyz\mathbf{j} + 4(3z^3 + xy^2)\mathbf{k}$; C é o arco da hélice circular $\mathbf{R}(t) = 3 \cos t\mathbf{i} + 3 \sin t\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $0 \leq t \leq \pi/3$.

10. Se \mathbf{F} for o campo de força definido por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{k(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

ache o trabalho realizado por \mathbf{F} ao mover uma partícula ao longo do segmento de reta do ponto $(3, 0, 0)$ a $(3, 0, 4)$. Calcule a integral de linha por dois métodos. **(a)** usando uma função potencial para \mathbf{F} ; **(b)** não usando uma função potencial para \mathbf{F} .

1.10.0 Teorema de Green

Se \mathbf{F} é um campo conservativo, então sabemos que $\mathbf{F} = \nabla f$ para uma função derivável f , e podemos calcular a integral de linha de \mathbf{F} sobre qualquer caminho C ligando o ponto A ao ponto B por $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = f(B) - f(A)$. Nesta seção, mostraremos um método para calcular uma integral sobre uma curva fechada C no plano quando o campo \mathbf{F} não é conservativo. Esse método, conhecido como o Teorema de Green, nos permite converter uma integral de linha em uma integral dupla sobre a região delimitada por C .

No enunciado do teorema de Green iremos nos referir a uma integral de linha ao longo de uma curva C fechada e lisa por partes que forma a fronteira de uma região R no plano e o sentido ao longo de C é anti-horário. A integral de linha em torno de C no sentido anti-horário é denotada por \oint_C .

Teorema 1.10.1 (Teorema de Green)

Sejam M e N funções de duas variáveis x e y , de tal modo que tenham derivadas parciais de primeira ordem contínuas em um disco aberto B em \mathbb{R}^2 . Se C for uma curva fechada lisa por partes, contida inteiramente em B , e se R for a região limitada por C , então

$$\oint_C M(x, y)dx + N(x, y)dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA.$$

Exemplo 1.10.1

Usaremos o teorema de Green para calcular a integral de linha $\oint_C y^2 dx + 4xy dy$, onde C é a curva fechada que consiste no arco da parábola $y = x^2$, da origem ao ponto $(2, 4)$ e no segmento de reta de $(2, 4)$ até a origem. Do teorema de Green,

$$\begin{aligned} \oint_C y^2 dx + 4xy dy &= \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}(4xy) - \frac{\partial}{\partial y}(y^2) \right] dA \\ &= \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (4y - 2y) dy dx \\ &= \frac{64}{15} \end{aligned}$$

Para mostrar a vantagem de usar o teorema de Green, vamos calcular a mesma integral de linha pelo método que aprendemos nas seções anteriores. Se C_1 for o arco da parábola $y = x^2$ de $(0, 0)$ a $(2, 4)$ e C_2 for o segmento de reta de $(2, 4)$ até $(0, 0)$,

então

$$\oint_C y^2 dx + 4xy dy = \oint_{C_1} y^2 dx + 4xy dy + \oint_{C_2} y^2 dx + 4xy dy$$

As equações paramétricas de C_1 são

$$x = t \quad y = t^2 \quad 0 \leq t \leq 2$$

Logo,

$$\begin{aligned} \oint_{C_1} y^2 dx + 4xy dy &= \int_0^2 (t^2)^2 dt + 4(t)(t^2)(2t dt) \\ &= \int_0^2 9t^4 dt = \frac{288}{5} \end{aligned}$$

O arco C_2 pode ser representado parametricamente por

$$x = t \quad y = 2t \quad \text{de } t = 2 \text{ a } t = 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \oint_{C_2} y^2 dx + 4xy dy &= \int_2^0 (2t)^2 dt + 4(t)(2t)(2dt) \\ &= \int_2^0 20t^2 dt = -\frac{160}{3} \end{aligned}$$

Logo,

$$\oint_C y^2 dx + 4xy dy = \frac{288}{5} - \frac{160}{3} = \frac{64}{15}.$$

que está de acordo com o resultado obtido, usando o teorema de Green.

Exemplo 1.10.2

Use o teorema de Green para encontrar o trabalho total realizado ao mover um objeto no sentido anti-horário, uma vez em torno da circunferência $x^2 + y^2 = a^2$, se o movimento for causado por um campo de forças $\mathbf{F}(x, y) = (\sin x - y)\mathbf{i} + (e^y - x^2)\mathbf{j}$. Suponha que o arco seja medido em metros e a força em newtons.

Solução: Se W for o trabalho realizado, então

$$W = \oint_C (\sin x - y) dx + (e^y - x^2) dy$$

onde C é a circunferência $x^2 + y^2 = a^2$. Do teorema de Green,

$$\begin{aligned} W &= \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}(e^y - x^2) - \frac{\partial}{\partial y}(\sin x - y) \right] dA \\ &= \iint_R (-2x + 1) dA \end{aligned}$$

Usaremos coordenadas polares para calcular a integral dupla, com $x = r \cos \theta$ e $dA = r dr d\theta$. Então,

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{2\pi} \int_0^a (-2r \cos \theta + 1) r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^a (-2r^2 \cos \theta + r) dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left. -\frac{2}{3}r^3 \cos \theta + \frac{r^2}{2} \right|_0^a d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{2}{3}a^3 \cos \theta + \frac{a^2}{2} \right) d\theta \\ &= \left. -\frac{2}{3}a^3 \sin \theta + \frac{a^2}{2}\theta \right|_0^{2\pi} = \pi a^2. \end{aligned}$$

Logo, o trabalho realizado foi de πa^2 J.

O teorema a seguir, que é uma consequência do teorema de Green, fornece um método útil para o cálculo da área de uma região limitada por uma curva lisa por partes.

Teorema 1.10.2

Se R for uma região tendo por fronteira uma curva C fechada e lisa por partes, e A unidades de área for a área de R , então

$$A = \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx.$$

Exemplo 1.10.3

Use o teorema anterior para encontrar a área da região limitada pela elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Solução: As equações paramétricas da elipse são:

$$x = a \cos t \quad y = b \sin t \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Então $dx = -a \sin t dt$ e $dy = b \cos t dt$. Se C for a elipse e A unidades for a área da região limitada por C , então, do teorema

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [(a \cos t)(b \cos t dt) - (b \sin t)(-a \sin t dt)] \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab(\cos^2 t + \sin^2 t) dt \\ &= \frac{1}{2} ab \int_0^{2\pi} dt = \pi ab. \end{aligned}$$

Logo, a área é πab unidades.

Exemplo 1.10.4

Use o teorema de Green para calcular a integral de linha

$$\oint_C (x^4 - 3y) dx + (2y^3 + 4x) dy$$

onde C é a elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Solução: Do teorema de Green,

$$\begin{aligned} \oint_C (x^4 - 3y) dx + (2y^3 + 4x) dy &= \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x} (2y^3 + 4x) - \frac{\partial}{\partial y} (x^4 - 3y) \right] dA \\ &= \iint_R (4 + 3) dA \\ &= 7 \iint_R dA. \end{aligned}$$

A integral dupla $\iint_R dA$ é a medida da área delimitada pela elipse. Do exemplo anterior, com $a = 3$ e $b = 2$, a medida da área da região delimitada pela elipse é 6π . Logo,

$$\oint_C (x^4 - 3y) dx + (2y^3 + 4x) dy = 42\pi.$$

Há duas formas vetoriais do teorema de Green que iremos obter. Seja C uma curva fechada lisa por partes no plano xy . Vamos supor que uma equação vetorial de C seja

$$\mathbf{R}(s) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$

e $x = f(s), y = g(s)$, onde s unidades são o comprimento do arco medido no sentido anti-horário de um ponto particular P_0 em C ao ponto P em C . Então, se $\mathbf{T}(s)$ for o vetor tangente unitário de C em P , temos $\mathbf{T}(s) = \mathbf{R}'(s)$. Assim,

$$\mathbf{T}(s) = \frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j} \quad (1.10.1)$$

O vetor $\mathbf{N}(s)$, definido por

$$\mathbf{N}(s) = \frac{dy}{ds}\mathbf{i} - \frac{dx}{ds}\mathbf{j} \quad (1.10.2)$$

é o vetor normal unitário de C em P . Para verificar esse fato, observe que $\mathbf{T}(s) \cdot \mathbf{N}(s) = 0$ e os módulos de $\mathbf{T}(s)$ e $\mathbf{N}(s)$ são iguais. O vetor normal unitário, definido por (1.10.2), foi escolhido ao invés de seu negativo, de tal forma que quando o sentido do percurso ao longo de C for anti-horário, $\mathbf{N}(s)$ irá apontar para fora da região R , limitada por C e será chamado de **normal exterior unitário**. Seja

$$\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$$

onde M e N satisfazem as hipóteses do teorema de Green. Como

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(x, y) \cdot \mathbf{N}(s) ds &= [M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}] \cdot \left(\frac{dy}{ds}\mathbf{i} - \frac{dx}{ds}\mathbf{j} \right) ds \\ &= M(x, y)dy - N(x, y)dx \end{aligned}$$

então

$$\oint_C \mathbf{F}(x, y) \cdot \mathbf{N}(s) ds = \oint_C -N(x, y)dx + M(x, y)dy.$$

Aplicando o teorema de Green à integral de linha à direita dessa relação teremos

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{F}(x, y) \cdot \mathbf{N}(s) ds &= \iint_R \left[\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}(-N) \right] dA \\ &= \iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \right) dA \\ &= \iint_R \operatorname{div} \mathbf{F} dA. \end{aligned}$$

Essa forma vetorial do teorema de Green será enunciada formalmente como o teorema a seguir, cujo nome é uma homenagem ao matemático e cientista alemão Karl Gauss (1777 – 1855).

Teorema 1.10.3 (Teorema da divergência de Gauss no Plano)

Sejam as funções M e N , a curva C e a região R idênticas como àquelas que forma definidas no teorema de Green. Se $\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$ e $\mathbf{N}(s)$ for o vetor normal exterior unitário de C em P , onde s unidades é o comprimento do arco medido no sentido anti-horário de um ponto particular P_0 em C até P , então

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} ds = \iint_R \operatorname{div} \mathbf{F} dA.$$

Exemplo 1.10.5

Verifique o teorema da divergência de Gauss no plano se

$$\mathbf{F}(x, y) = 2y\mathbf{i} + 5x\mathbf{j}$$

e R for a região limitada pela circunferência $x^2 + y^2 = 1$.

Solução: A fronteira de R é a circunferência unitária que pode ser representada parametricamente por

$$x = \cos s \quad y = \sin s \quad 0 \leq s \leq 2\pi$$

onde s unidades é o comprimento de arco entre o ponto onde $s = 0$ ao ponto P em C . Então, uma equação vetorial de C é

$$\mathbf{R}(s) = \cos s \mathbf{i} + \sin s \mathbf{j} \quad 0 \leq s \leq 2\pi.$$

De (??), o vetor normal exterior unitário é

$$\mathbf{N}(s) = \cos s \mathbf{i} + \sin s \mathbf{j}$$

Em um ponto $P(\cos s, \sin s)$ em C , \mathbf{F} é $2 \sin s \mathbf{i} + 5 \cos s \mathbf{j}$. Logo,

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} ds &= \int_0^{2\pi} (2 \sin s \mathbf{i} + 5 \cos s \mathbf{j}) \cdot (\cos s \mathbf{i} + \sin s \mathbf{j}) ds \\ &= \int_0^{2\pi} (2 \sin s \cos s + 5 \sin s \cos s) ds \\ &= 7 \int_0^{2\pi} \sin s \cos s ds \\ &= \frac{7}{2} \sin^2 s \Big|_0^{2\pi} = 0 \end{aligned}$$

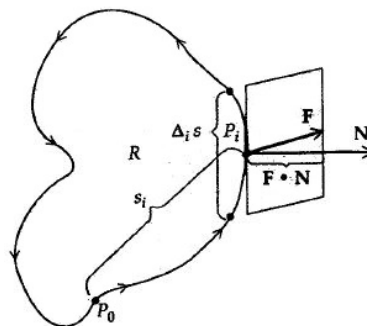
Como $M = 2y$, $\frac{\partial M}{\partial x} = 0$, e como $N = 5x$, $\frac{\partial N}{\partial y} = 0$. Assim,

$$\iint_R \operatorname{div} \mathbf{F} dA = \iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \right) dA = 0.$$

Portanto, verificamos o teorema da divergência de Gauss no plano para \mathbf{F} e R .

Vamos usar agora o teorema da divergência de Gauss no plano, para dar uma interpretação física da divergência de uma campo vetorial. Sejam as funções M e N , a região R e a curva C , conforme foram definidas no teorema de Green. Suponhamos que \mathbf{F} seja um campo de velocidades de um fluido bidimensional e seja $\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$. Suponhamos que o fluido flua através de uma região R , tendo a curva C como fronteira, e que o sentido ao longo de C seja anti-horário. Vamos supor que o fluido tenha densidade constante em R e, por conveniência, a medida da densidade seja unitária. O fluxo do campo de velocidades \mathbf{F} através de C é a taxa segundo a qual o fluido atravessa C na direção perpendicular a C (A taxa refere-se ao tempo e o fluxo é a quantidade de massa por unidade de tempo que atravessa C ; positivo se de dentro para fora e negativo, em caso em contrário). Mostraremos como esse fluxo pode ser expresso como uma integral de linha.

Sejam s unidades o comprimento de arco da curva C , medido a partir de um ponto particular P_0 , até o ponto P . Vamos dividir a curva em n arcos e seja $\Delta_i s$ o comprimento do i -ésimo arco contendo o ponto $P_i(x_i, y_i)$, onde s_i é o comprimento de arco de C , de P_0 até P_i . Como \mathbf{F} é contínua, uma aproximação da velocidade do fluido em cada ponto do i -ésimo arco é $\mathbf{F}(x_i, y_i)$. A quantidade de fluido que atravessa o arco por unidade de tempo é dada aproximadamente pela área de um paralelogramo, tendo um par de lados opostos de comprimento $\Delta_i s$ e uma altura de comprimento $\mathbf{F}(x_i, y_i) \cdot \mathbf{N}(s_i)$, onde $\mathbf{N}(s_i)$ é o vetor normal exterior unitário a C em $P_i(x_i, y_i)$.



A medida da área do paralelogramo é $\mathbf{F}(x_i, y_i) \cdot \mathbf{N}(s_i)\Delta_i s$. A quantidade total de fluido que atravessa C por unidade de tempo é, aproximadamente,

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}(x_i, y_i) \cdot \mathbf{N}(s_i)\Delta_i s$$

Tomando o limite dessa soma quando n cresce sem limitação e quando $\Delta_i s$ tende

a zero, obtemos a integral de linha

$$\oint_C \mathbf{F}(x, y) \cdot \mathbf{N}(s) ds$$

que é chamada de **fluxo** de \mathbf{F} através de C .

A palavra *fluxo* normalmente significa escoamento; contudo, o termo *fluxo* é aplicado a campos vetoriais em geral, mesmo que nada tenham a ver com velocidade de um fluido. Assim, se \mathbf{F} for um campo vetorial

$$\text{fluxo de } \mathbf{F} \text{ através de } C = \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} ds \quad (1.10.3)$$

Exemplo 1.10.6

O campo de velocidades de um fluido é definido por

$$\mathbf{F}(x, y) = (5x - y)\mathbf{i} + (x^2 - 3y)\mathbf{j}.$$

Ache a taxa de escoamento do fluido para fora da região R , limitada por uma curva fechada, lisa, C e cuja área seja 150 cm^2 .

Solução: A taxa de escoamento do fluido é dada pelo fluxo de \mathbf{F} através de C . De (1.10.3) e do teorema da divergência de Gauss no plano,

$$\begin{aligned} \text{fluxo} &= \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} ds \\ &= \iint_R \text{div } \mathbf{F} dA \\ &= \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}(5x - y) + \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - 3y) \right] dA \\ &= \iint_R (5 - 3) dA \\ &= 2 \iint_R dA. \end{aligned}$$

Como a área de R é 150 cm^2 , $\iint_R dA = 150$. Logo,

$$\text{fluxo} = 300$$

Portanto, a taxa de escoamento do fluido para fora da região é 300 cm^2 por unidade de tempo.

Para obter a segunda forma vetorial do teorema de Green, vamos considerar o

produto escalar de $\mathbf{F}(x, y)$ pelo vetor tangente unitário $\mathbf{T}(s)$, definido pela igualdade (1.10.1). Temos,

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(x, y) \cdot \mathbf{T}(s) ds &= [M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}] \cdot \left(\frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j} \right) ds \\ &= M(x, y)dx + N(x, y)dy.\end{aligned}$$

Assim,

$$\oint_C \mathbf{F}(x, y) \cdot \mathbf{T}(s) ds = \oint_C M(x, y)dx + N(x, y)dy \quad (1.10.4)$$

O rotacional de \mathbf{F} em duas dimensões foi definido anteriormente como

$$\text{rot } \mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \mathbf{k}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\text{rot } \mathbf{F}(x, y) \cdot \mathbf{k} &= \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} \\ &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}.\end{aligned}$$

Assim sendo, dessa equação e de (1.10.4), a fórmula do teorema de Green pode ser escrita como

$$\oint_C \mathbf{F}(x, y) \cdot \mathbf{T}(s) ds = \iint_R \text{rot } \mathbf{F}(x, y) \cdot \mathbf{k} dA$$

Essa forma vetorial do teorema de Green está enunciada formalmente como o teorema a seguir, cujo nome foi dado em homenagem ao matemático e físico irlandês George Stokes (1819 – 1903).

Teorema 1.10.4 (Teorema de Stokes no Plano)

Sejam as funções M e N , a curva C e a região R definidas como no teorema de Green. Se $\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$ e $\mathbf{T}(s)$ for o vetor tangente unitário de C em P , onde s unidades é o comprimento de arco de C medido a partir de um ponto P_0 até P , então

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds = \iint_R \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} dA.$$

Exemplo 1.10.7

Verifique o teorema de Stokes no plano para \mathbf{F} e R do Exemplo 1.10.5.

Solução: Como no Exemplo 1.10.5, o campo vetorial \mathbf{F} é definido por $\mathbf{F}(x, y) = 2y\mathbf{i} + 5x\mathbf{j}$ e uma equação vetorial de C é $\mathbf{R}(s) = \cos s\mathbf{i} + \sin s\mathbf{j}$, $0 \leq s \leq 2\pi$.

Como $\mathbf{T}(s) = \mathbf{R}'(s)$, então $\mathbf{T}(s) = -\sin s \mathbf{i} + \cos s \mathbf{j}$.

Num ponto $P(\cos s, \sin s)$ em C , \mathbf{F} é $2 \sin s \mathbf{i} + 5 \cos s \mathbf{j}$. Logo,

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds &= \int_0^{2\pi} (2 \sin s \mathbf{i} + 5 \cos s \mathbf{j}) \cdot (-\sin s \mathbf{i} + \cos s \mathbf{j}) ds \\ &= \int_0^{2\pi} (-2 \sin^2 s + 5 \cos^2 s) ds \\ &= -2 \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos(2s)}{2} ds + 5 \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos(2s)}{2} ds \\ &= -s + \frac{1}{2} \sin(2s) + \frac{5}{2}s + \frac{5}{4} \sin(2s) \Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{3}{2}s + \frac{7}{4} \sin(2s) \Big|_0^{2\pi} = 3\pi. \end{aligned}$$

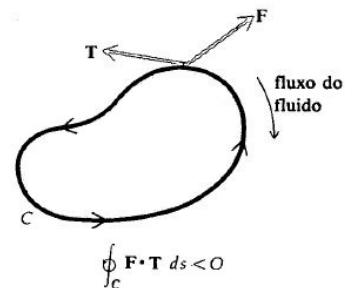
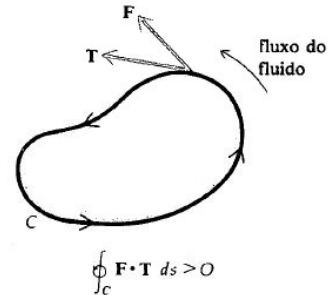
Como $N = 5x$, $\frac{\partial N}{\partial x} = 5$ e como $M = 2y$, $\frac{\partial M}{\partial y} = 2$. Assim,

$$\begin{aligned} \iint_R \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} dA &= \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA = \iint_R (5 - 2) dA \\ &= 3 \iint_R dA = 3\pi. \end{aligned}$$

Assim sendo, para esse \mathbf{F} e esse R o teorema de Stokes no plano está verificado.

Se \mathbf{F} for o campo de velocidades de um fluido, o produto escalar $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$ será a componente tangencial de \mathbf{F} e a integral de linha $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds$ será chamada de **circulação** em torno da curva fechada C . De uma forma intuitiva, podemos considerar a circulação como sendo a soma das componentes tangenciais de \mathbf{F} em torno de C . Se o movimento em torno de C for no sentido anti-horário e

$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds > 0$, então o fluido está circulando no sentido anti-horário. Se $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds < 0$, a circulação do fluido será no sentido horário. Quando \mathbf{F} e \mathbf{T} forem vetores ortogonais, $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T} = 0$ e, então, $\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$. Em tal caso, \mathbf{F} será chamado de **irrotacional**. Essa terminologia é usada mesmo que \mathbf{F} não seja um campo de vetores.



• • •

1.10.1. Lista de Exercícios

Nos exercícios de 01 a 04, calcule a integral de linha pelo teorema de Green. Verifique, então, o resultado pelo método anterior.

1. $\oint_C 4y \, dx + 3x \, dy$, onde C é o quadrado com vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$.
2. $\oint_C 2xy \, dx - x^2y \, dy$, onde C é o triângulo com vértices em $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ e $(0, 1)$.
3. $\oint_C x^2y \, dx - y^2x \, dy$, onde C é a circunferência $x^2 + y^2 = 1$
4. A integral de linha do Exercício 3, onde C é a curva fechada que consiste no arco $4y = x^3$ de $(0, 0)$ a $(2, 2)$ e no segmento de reta de $(2, 2)$ a $(0, 0)$.

Nos Exercícios de 5 a 10, use o teorema de Green para calcular a integral de linha.

5. $\oint_C (x + y) \, dx + xy \, dy$, onde C é a curva fechada, determinada pelo eixo x , pela reta $x = 2$ e pela curva $4y = x^3$.
6. $\oint_C (-x^2 + x) \, dy$, onde C é a curva fechada, determinada pela reta $x - 2y = 0$ e pela parábola $x = 2y^2$.
7. $\oint_C \cos y \, dx + \cos x \, dy$, onde C é o retângulo com vértices em $(0, 0)$, $(\frac{\pi}{3}, 0)$, $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4})$ e $(0, \frac{\pi}{4})$.
8. $\oint_C e^{x+y} \, dx + e^{x+y} \, dy$, C é a circunferência $x^2 + y^2 = 4$.
9. $\oint_C (\sin^4 x + e^{2x}) \, dx + (\cos^3 y - e^y) \, dy$, onde C é a curva $x^4 + y^4 = 16$.
10. $\oint_C (e^x - x^2y) \, dx + 3x^2y \, dy$, onde C é a curva fechada, determinada por $y = x^2$ e $x = y^2$.

Nos Exercícios 11 a 14, calcule a área da região dada, usando o teorema para cálculo de áreas apresentado nesta seção.

11. A região limitada pelos gráficos de $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$
12. A região limitada pela parábola $y = 2x^2$ e pela reta $y = 8x$.
13. A região limitada pela hipociclóide, tendo equações paramétricas

$$x = a \cos^3 t \quad y = a \sin^3 t \quad a > 0 \quad 0 \leq 2\pi.$$

14. A região limitada abaixo pelo eixo x e acima por um arco da cicloide, tendo equações paramétricas

$$x = t - \sin t \quad y = 1 - \cos t \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Nos Exercícios de 15 a 17, verifique o teorema da divergência de Gauss no plano e o teorema de Stokes no plano para \mathbf{F} e \mathbf{R} dados.

15. $\mathbf{F}(x, y) = 3x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}$ e R é a região limitada pela circunferência $x^2 + y^2 = 1$.

16. $\mathbf{F}(x, y) = 3y\mathbf{i} - 2x\mathbf{j}$ e R é a região limitada por $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$.

17. $\mathbf{F}(x, y) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j}$ e R é a região limitada peça elipse $4x^2 + 25y^2 = 100$.

Nos Exercícios de 18 a 21, use o teorema de Green para encontrar o trabalho total realizado pelo campo de forças $\mathbf{F}(x, y)$ ao mover um objeto no sentido anti-horário, uma volta em torno da curva C dada. Suponha que o arco seja medido em metros e a força em newtons.

18. C é a elipse $x^2 + 4y^2 = 16$; $\mathbf{F}(x, y) = (3x + y)\mathbf{i} + (4x - 5)\mathbf{j}$.

19. C é a circunferência $x^2 + y^2 = 25$; $\mathbf{F}(x, y) = (e^x + y^2)\mathbf{i} + (x^2y + \cos y)\mathbf{j}$.

20. C é o triângulo com vértices em $(0, 0)$, $(2, 0)$ e $(0, 2)$; $\mathbf{F}(x, y) = (e^{x^2} + y^2)\mathbf{i} + (e^{y^2} + x^2)\mathbf{j}$.

21. C consiste na parte superior da elipse $9x^2 + 4y^2 = 36$; e no intervalo $[-2, 2]$ no eixo x ; $\mathbf{F}(x, y) = (xy + y^2)\mathbf{i} + (xy)\mathbf{j}$.

Nos Exercícios 22 a 25, ache a taxa de escoamento do fluido para fora de uma região R , limitada pelo arco de curva C dado, se \mathbf{F} for o campo de velocidades do fluido. Suponha que a velocidade seja medida em centímetros por segundo e a área R seja medida em centímetros quadrados.

22. $\mathbf{F}(x, y) = (y^2 + 6x)\mathbf{i} + (2y - x^2)\mathbf{j}$; C é a elipse $x^2 + 4y^2 = 4$.

23. $\mathbf{F}(x, y) = (5y - y^2)\mathbf{i} + (3x - 2y)\mathbf{j}$; C é o triângulo retângulo com vértices em $(1, 2)$, $(4, 2)$ e $(4, 6)$.

24. $\mathbf{F}(x, y) = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j}$; C é a circunferência $x^2 + y^2 = 1$.

25. $\mathbf{F}(x, y) = (xy^2)\mathbf{i} + (yx^2)\mathbf{j}$; C é a circunferência $x^2 + y^2 = 9$.

Nos Exercícios 25 a 28, \mathbf{F} é o campo de velocidades de um fluido em torno de uma curva fechada C , sendo o movimento na direção anti-horária. Use o teorema de Stokes no plano para calcular $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds$ e pelo resultado determine qual das afirmações se aplica: (i) a circulação do fluido é anti-horária; (ii) a circulação do fluido é horária; (iii) \mathbf{F} é irrotacional.

25. $\mathbf{F}(x, y) = 4y\mathbf{i} + 6x\mathbf{j}$; C é o triângulo com vértices em $(0, 0)$, $(3, 0)$ e $(3, 5)$.

26. $\mathbf{F}(x, y) = 8y\mathbf{i} + 3x\mathbf{j}$; C é a elipse $4x^2 + 9y^2 = 1$.
27. $\mathbf{F}(x, y) = \sin^2 x\mathbf{i} + \cos^2 x\mathbf{j}$; C é a elipse $9x^2 + y^2 = 9$.
28. $\mathbf{F}(x, y) = y^3\mathbf{i} + x^3\mathbf{j}$; C é a circunferência $x^2 + y^2 = 25$.

1.11. Parametrizações e Área de Superfícies

Sabemos como integrar uma função sobre uma região em um plano, mas o que fazer se uma função for definida sobre uma superfície curva? Como calculamos sua integral? O truque para calcular essa integral de superfície é reescrevê-la como uma integral dupla sobre uma região de um plano coordenado sobre a superfície.

Definimos curvas no plano de três formas diferentes:

$$\text{Forma explícita: } y = f(x)$$

$$\text{Forma implícita: } F(x, y) = 0$$

$$\text{Forma vetorial paramétrica: } \mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}, \quad a \leq t \leq b.$$

Temos definições análogas de superfícies no espaço:

$$\text{Forma explícita: } z = f(x, y)$$

$$\text{Forma implícita: } F(x, y, z) = 0.$$

Existe ainda uma forma paramétrica para superfícies que fornece a posição de um ponto da superfície como uma função vetorial de duas variáveis. Discutiremos essa nova forma nesta seção e a aplicaremos para obter a área de uma superfície como uma integral dupla.

• • •

1.11.1. Parametrizações de superfícies

Suponha que

$$\mathbf{R}(u, v) = f(u, v)\mathbf{i} + g(u, v)\mathbf{j} + h(u, v)\mathbf{k} \quad (1.11.1)$$

seja uma função vetorial contínua que é definida em uma região R no plano uv e injetora no interior de R . Chamamos a imagem de \mathbf{R} de **superfície** S definida ou traçada por \mathbf{R} . A equação 1.11.1 juntamente com o domínio R constitui uma **parametrização** da superfície. As variáveis u e v são os **parâmetros**, e R é o **domínio dos parâmetros**. Para simplificar nossa discussão, consideramos R como um retângulo dado por $a \leq u \leq b$ e $c \leq v \leq d$. A exigência para que \mathbf{R} seja injetora no interior de R assegura que S não cruza a si mesma. Observe que a equação 1.11.1 é o equivalente vetorial de três equações paramétricas:

$$x = f(u, v), \quad y = g(u, v), \quad z = h(u, v).$$

Exemplo 1.11.1

Encontre uma parametrização do cone

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad 0 \leq z \leq 1.$$

Solução: Aqui, coordenadas cilíndricas fornecem uma parametrização. Um ponto típico (x, y, z) no cone tem $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ e $z = \sqrt{(r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2} = r$, com $0 \leq r \leq 1$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Assim, uma parametrização do cone é:

$$\mathbf{R}(r, \theta) = r \cos \theta \mathbf{i} + r \sin \theta \mathbf{j} + r \mathbf{k}, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Exemplo 1.11.2

Encontre uma parametrização para a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Solução: Coordenadas esféricas resolvem nosso problema. Um ponto típico (x, y, z) da esfera tem $x = a \sin \phi \cos \theta, y = a \sin \phi \sin \theta$ e $z = a \cos \phi, 0 \leq \phi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi$. Logo,

$$\mathbf{R}(\phi, \theta) = (a \sin \phi \cos \theta) \mathbf{i} + (a \sin \phi \sin \theta) \mathbf{j} + (a \cos \phi) \mathbf{k}, \quad 0 \leq \phi \leq \pi, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Exemplo 1.11.3

Encontre uma parametrização do cilindro

$$x^2 + (y - 3)^2 = 9, \quad 0 \leq z \leq 5.$$

Solução: Em coordenadas cilíndricas, um ponto (x, y, z) tem $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ e $z = z$. Note que

$$x^2 + (y - 3)^2 = 9 \Rightarrow x^2 + y^2 - 6y + 9 = 9 \Rightarrow r^2 - 6r \sin \theta = 0$$

ou

$$r = 6 \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Sendo assim, um ponto típico no cilindro tem

$$x = r \cos \theta = 6 \sin \theta \cos \theta = 3 \sin(2\theta)$$

$$y = r \sin \theta = 6 \sin^2 \theta$$

$$z = z$$

Donde

$$\mathbf{R}(\theta, z) = (3 \sin(2\theta)) \mathbf{i} + (6 \sin^2 \theta) \mathbf{j} + z \mathbf{k}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq z \leq 5.$$

• • •

1.11.2. Área de superfície

Nosso objetivo é encontrar uma integral dupla para o cálculo da área de uma superfície curva S com base na parametrização

$$\mathbf{R}(u, v) = f(u, v)\mathbf{i} + g(u, v)\mathbf{j} + h(u, v)\mathbf{k}, \quad a \leq u \leq b, \quad c \leq v \leq d.$$

Precisamos que S seja lisa para a construção que iremos realizar. A definição de superfície lisa envolve as derivadas parciais de \mathbf{R} com relação a u e v :

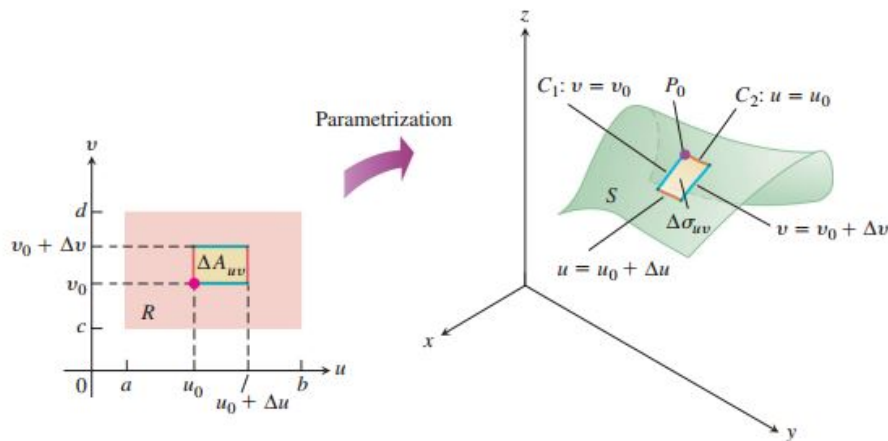
$$\begin{aligned} \mathbf{R}_u &= \frac{d\mathbf{R}}{du} = \frac{\partial f}{\partial u}\mathbf{i} + \frac{\partial g}{\partial u}\mathbf{j} + \frac{\partial h}{\partial u}\mathbf{k} \\ \mathbf{R}_v &= \frac{d\mathbf{R}}{dv} = \frac{\partial f}{\partial v}\mathbf{i} + \frac{\partial g}{\partial v}\mathbf{j} + \frac{\partial h}{\partial v}\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Definição 1.11.1

Uma superfície parametrizada $\mathbf{R}(u, v) = f(u, v)\mathbf{i} + g(u, v)\mathbf{j} + h(u, v)\mathbf{k}$ é **lisa** se \mathbf{R}_u e \mathbf{R}_v forem contínuas e $\mathbf{R}_u \times \mathbf{R}_v$ nunca for nulo no interior do domínio dos parâmetros.

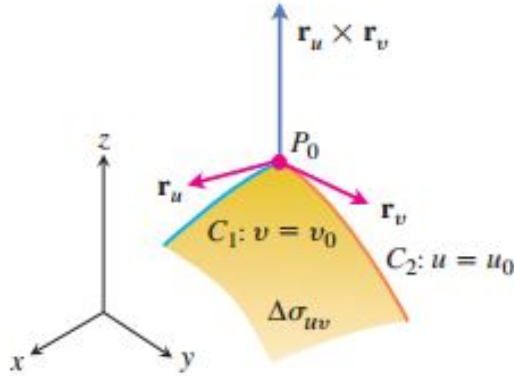
A condição de que $\mathbf{R}_u \times \mathbf{R}_v$ nunca é o vetor nulo significa que os dois vetores \mathbf{R}_u e \mathbf{R}_v são não nulos e nunca estão ao longo da mesma reta, de forma que eles sempre determinam um plano tangente à superfície.

Agora, considere um pequeno retângulo ΔA_{uv} em R com lados nas retas $u = u_0, u = u_0 + \Delta u, v = v_0$ e $v = v_0 + \Delta v$. Cada lado de ΔA_{uv} é mapeado para uma curva da superfície S , e juntas essas quatro curvas delimitam um “elemento de área curvo” $\Delta \sigma_{uv}$. Na notação da figura, o lado $v = v_0$ é mapeado pela curva C_1 , o lado $u = u_0$ é mapeado por C_2 , e seu vértice comum (u_0, v_0) é mapeado por P_0 .

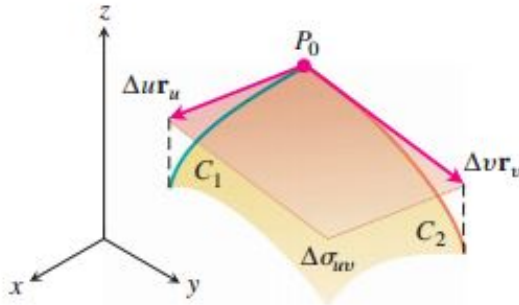


A figura abaixo mostra uma vista aumentada de $\Delta \sigma_{uv}$. O vetor de derivada parcial $\mathbf{R}_u(u_0, v_0)$ é tangente a C_1 em P_0 . Da mesma forma, $\mathbf{R}_v(u_0, v_0)$ é tangente a C_2 em

P_0 . O produto vetorial $\mathbf{R}_u \times \mathbf{R}_v$ é normal à superfície em P_0 . Aqui é fundamental a hipótese de que S seja lisa.



Em seguida, aproximamos o elemento de área de superfície $\Delta\sigma_{uv}$ pelo paralelogramo no plano tangente cujos os lados são determinados pelos vetores $\Delta u \mathbf{R}_u$ e $\Delta v \mathbf{R}_v$



A área desse paralelogramo é

$$\|\Delta u \mathbf{R}_u \times \Delta v \mathbf{R}_v\| = \|\mathbf{R}_u \times \mathbf{R}_v\| \Delta u \Delta v. \quad (1.11.2)$$

Uma partição da região R no plano uv por regiões retangulares ΔA_{uv} induz uma partição da superfície S em elementos de área de superfície $\Delta\sigma_{uv}$. Aproximamos a área de cada elemento de área de superfície $\Delta\sigma_{uv}$ pela área do paralelogramo na equação 1.11.2 e somamos essas áreas para obter uma aproximação da área da superfície de S :

$$\sum_n |\mathbf{R}_u \times \mathbf{R}_v| \Delta u \Delta v. \quad (1.11.3)$$

À medida que Δu e Δv se aproximam de zero de forma independente, o número dos elementos de área n tende a ∞ e a continuidade de \mathbf{R}_u e \mathbf{R}_v garante que a soma

da equação 1.11.3 tende à integral dupla

$$\int_c^d \int_a^b |\mathbf{R}_u \times \mathbf{R}_v| dudv.$$

Essa integral dupla sobre a região R define a área da superfície S .

Definição 1.11.2

A área da superfície lisa

$$\mathbf{R}(u, v) = f(u, v)\mathbf{i} + g(u, v)\mathbf{j} + h(u, v)\mathbf{k}, \quad a \leq u \leq b, \quad c \leq v \leq d$$

é

$$A = \int_R |\mathbf{R}_u \times \mathbf{R}_v| dA = \int_c^d \int_a^b |\mathbf{R}_u \times \mathbf{R}_v| dudv \quad (1.11.4)$$

Podemos abreviar a integral na equação 1.11.4 escrevendo $d\sigma$ para $|\mathbf{R}_u \times \mathbf{R}_v| dudv$. A diferencial de área de superfície $d\sigma$ é análoga à diferencial de comprimento de arco ds dada anteriormente.

Diferencial de área para uma superfície parametrizada

$$d\sigma = |\mathbf{R}_u \times \mathbf{R}_v| dudv \quad \iint_S d\sigma \quad (1.11.5)$$

Exemplo 1.11.4

Encontre a área da superfície do cone dado por $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \leq z \leq 1$.

Solução: Usamos a parametrização

$$\mathbf{R}(r, \theta) = (r \cos \theta)\mathbf{i} + (r \sin \theta)\mathbf{j} + r\mathbf{k}, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Para aplicar a equação 1.11.4, primeiro encontramos $\mathbf{R}_u \times \mathbf{R}_v$:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_u \times \mathbf{R}_v &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos \theta & \sin \theta & 1 \\ -r \sin \theta & r \cos \theta & 0 \end{vmatrix} \\ &= -(r \cos \theta)\mathbf{i} - (r \sin \theta)\mathbf{j} + (r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta)\mathbf{k} \end{aligned}$$

Assim, $|\mathbf{R}_u \times \mathbf{R}_v| = \sqrt{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta + r^2} = \sqrt{2r^2} = \sqrt{2}r$. A área do cone é

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 |\mathbf{R}_r \times \mathbf{R}_\theta| dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{2}r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{2}}{2} d\theta = \pi\sqrt{2} \text{ unidades quadradas.} \end{aligned}$$

Exemplo 1.11.5

Encontre a área da superfície de uma esfera de raio a .

Solução: Usamos a parametrização da esfera por coordenadas esféricas.

$$\mathbf{R}(u, v) = (a \sin \phi \cos \theta)\mathbf{i} + (a \sin \phi \sin \theta)\mathbf{j} + (a \cos \phi)\mathbf{k}, \quad 0 \leq \phi \leq \pi, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Para $|\mathbf{R}_\phi \times \mathbf{R}_\theta|$, temos

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_\phi \times \mathbf{R}_\theta &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a \cos \phi \cos \theta & a \cos \phi \sin \theta & -a \sin \phi \\ -a \sin \phi \sin \theta & a \sin \phi \cos \theta & 0 \end{vmatrix} \\ &= (a^2 \sin^2 \phi \cos \theta)\mathbf{i} + (a^2 \sin^2 \phi \sin \theta)\mathbf{j} + (a^2 \sin \phi \cos \phi)\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} |\mathbf{R}_\phi \times \mathbf{R}_\theta| &= \sqrt{a^4 \sin^4 \phi \cos^2 \theta + a^4 \sin^4 \phi \sin^2 \theta + a^4 \sin^2 \phi \cos^2 \phi} \\ &= \sqrt{a^4 \sin^4 \phi + a^4 \sin^4 \phi \cos^2 \phi} = \sqrt{a^4 \sin \phi (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi)} \\ &= a^2 \sqrt{\sin^2 \phi} = a^2 \sin \phi \end{aligned}$$

uma vez que $\sin \phi \geq 0$ para $0 \leq \phi \leq \pi$. Portanto a área da esfera é

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi a^2 \sin \phi d\phi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} 2a^2 d\theta = 4\pi a^2 \text{ unidades de área.} \end{aligned}$$

•••

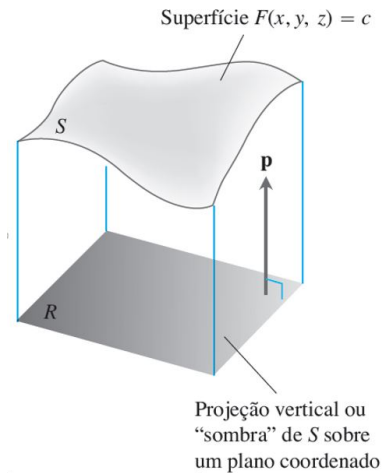
1.11.3. Superfícies implícitas

As superfícies são geralmente apresentadas como conjuntos de nível de uma função descritas por uma equação como

$$F(x, y, z) = c,$$

para alguma constante c . Tal superfície de nível não vem com uma parametrização explícita e é denominada *superfície implicitamente definida*. Pode ser difícil encontrar fórmulas explícitas para as funções f, g e h que descrevem a superfície na forma $\mathbf{R}(u, v) = f(u, v)\mathbf{i} + g(u, v)\mathbf{j} + h(u, v)\mathbf{k}$. Agora mostraremos como calcular o diferencial de área de superfície $d\sigma$ para superfícies implícitas.

A figura ao lado mostra um pedaço de uma superfície S , que está acima de sua região “sombreada” R no plano abaixo dela. A superfície é definida pela equação $F(x, y, z) = c$ e \mathbf{p} é um vetor unitário normal à região plana R . Assumimos que a superfície é lisa (F é diferenciável e ∇F é diferente de zero e contínuo em S) e que $\nabla F \cdot \mathbf{p} \neq 0$, de forma que a superfície nunca se dobra sobre si mesma.



Assuma que o vetor normal \mathbf{p} seja o vetor unitário \mathbf{k} , de modo que a região R na figura está no plano xy . Por suposição, temos então $\nabla F \cdot \mathbf{p} = \nabla F \cdot \mathbf{k} = F_z \neq 0$ em S . Um teorema de cálculo avançado, denominado de teorema da função implícita, implica que S está então no gráfico de uma função diferenciável $z = h(x, y)$, ainda que a função $h(x, y)$ não seja conhecida explicitamente. Defina os parâmetros u e v por $u = x$ e $v = y$. Então $z = h(u, v)$ e

$$\mathbf{R}(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + h(u, v)\mathbf{k} \tag{1.11.6}$$

fornece uma parametrização da superfície S . Utilizamos a equação 1.11.4 para encontrar a área de S .

Calculando as derivadas parciais de \mathbf{R} , encontramos

$$\mathbf{R}_u = \mathbf{i} + \frac{\partial h}{\partial u}\mathbf{k} \quad \text{e} \quad \mathbf{R}_v = \mathbf{j} + \frac{\partial h}{\partial v}\mathbf{k}$$

Aplicando a regra da cadeia para diferenciação implícita para $F(x, y, z) = c$, onde $x = u, y = v$ e $z = h(u, v)$, obtemos as derivadas parciais

$$\frac{\partial h}{\partial u} = -\frac{F_x}{F_z} \quad \text{e} \quad -\frac{F_y}{F_z}.$$

A substituição dessas derivadas pelas derivadas parciais de \mathbf{R} fornece

$$\mathbf{R}_u = \mathbf{i} - \frac{F_x}{F_z}\mathbf{k} \quad \text{e} \quad \mathbf{R}_v = \mathbf{j} - \frac{F_y}{F_z}\mathbf{k}.$$

A partir de um cálculo de rotina do produto vetorial, descobrimos que

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_u \times \mathbf{R}_v &= \frac{F_x}{F_z} \mathbf{i} + \frac{F_y}{F_z} \mathbf{j} + \mathbf{k} \\ &= \frac{1}{F_z} (F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}) \\ &= \frac{\nabla F}{F_z} = \frac{\nabla F}{\nabla F \cdot \mathbf{k}} \\ &= \frac{\nabla F}{\nabla F \cdot \mathbf{p}}. \end{aligned}$$

Sendo assim, a diferencial da área de superfície é dada por

$$d\sigma = \|\mathbf{R}_u \times \mathbf{R}_v\| \, dudv = \frac{\|\nabla F\|}{|\nabla F \cdot \mathbf{p}|} \, dxdy.$$

Obteremos cálculos semelhantes se, em vez disso, o vetor $\mathbf{p} = \mathbf{j}$ for normal ao plano xz quando $F_y \neq 0$ em S , ou se $\mathbf{p} = \mathbf{i}$ for normal ao plano yz quando $F_x \neq 0$ em S .

Definição 1.11.3 (Fórmula para a área de uma superfície implícita)

A área da superfície $F(x, y, z) = c$ sobre uma região plana fechada e limitada R é

$$\text{Área da superfície} = \iint_R \frac{\|\nabla F\|}{|\nabla F \cdot \mathbf{p}|} \, dA, \quad (1.11.7)$$

onde $\mathbf{p} = \mathbf{i}, \mathbf{j}$ ou \mathbf{k} é normal a R e $\nabla F \cdot \mathbf{p} \neq 0$.

Exemplo 1.11.6

Encontre a área da superfície cortada a partir do fundo do parabolóide $x^2 + y^2 - z = 0$ pelo plano $z = 4$.

Solução: A superfície S é parte da superfície de nível $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z = 0$, e R é o disco $x^2 + y^2 \leq 4$ no plano xy . Para obter um vetor unitário normal ao plano de R , podemos tomar $\mathbf{p} = \mathbf{k}$.

Em qualquer ponto (x, y, z) na superfície, temos

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= x^2 + y^2 - z \\ \nabla F &= 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - \mathbf{k} \\ \|\nabla F\| &= \sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} \\ |\nabla F \cdot \mathbf{p}| &= |\nabla F \cdot \mathbf{k}| = |-1| = 1. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 \text{Área da superfície} &= \iint_R \frac{\|\nabla F\|}{|\nabla F \cdot \mathbf{p}|} dA \\
 &= \iint_R \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} dA \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \sqrt{4r^2 + 1} r dr d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{12} (4r^2 + 1)^{3/2} \right]_0^2 d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{12} (17^{3/2} - 1) d\theta = \frac{\pi}{6} (17\sqrt{17} - 1).
 \end{aligned}$$

Exemplo 1.11.7

Encontre a área da calota cortada do hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, $z \geq 0$ pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

Solução: A calota S é parte da superfície de nível $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 2$. Ela se projeta sobre o disco $R : x^2 + y^2 \leq 1$ no plano xy . O vetor $\mathbf{p} = \mathbf{k}$ é normal ao plano de R .

Em qualquer ponto da superfície

$$\begin{aligned}
 F(x, y, z) &= x^2 + y^2 + z^2 \\
 \nabla F &= 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k} \\
 \|\nabla F\| &= 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2\sqrt{2} \\
 |\nabla F \cdot \mathbf{p}| &= |\nabla F \cdot \mathbf{k}| = |2z| = 2z
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\text{Área da superfície} = \iint_R \frac{\|\nabla F\|}{|\nabla F \cdot \mathbf{k}|} dA = \iint_R \frac{2\sqrt{2}}{2z} dA = \sqrt{2} \iint_R \frac{dA}{z}.$$

Isolando z na equação da esfera, obtemos $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$. Substituindo na igualdade acima obteremos

$$\text{Área da superfície} = \sqrt{2} \iint_R \frac{dA}{\sqrt{2 - x^2 - y^2}}.$$

Resolvemos a última integral usando coordenadas polares para encontrar que a área da superfície é $2\pi(2 - \sqrt{2})$ unidades de área.

• • •

1.11.4. Lista de exercícios

Nos exercícios de 01 a 04, encontre uma parametrização da superfície.

1. O parabolóide $z = x^2 + y^2$, $z \leq 4$.
2. O parabolóide $z = 9 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$.
3. A calota cortada da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.
4. A porção do cilindro $y^2 + z^2 = 9$ entre os planos $x = 0$ e $x = 3$.

Nos Exercícios de 5 a 09, utilize uma parametrização para expressar a área da superfície como uma integral dupla. Em seguida, calcule a integral.

5. A porção do plano $y + 2z = 2$ dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$.
6. A porção do cone $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$ entre os planos $z = 2$ e $z = 6$.
7. A porção do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ entre os planos $z = 1$ e $z = 4$.
8. A calota cortada do parabolóide $z = 2 - x^2 - y^2$ pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.
9. A porção inferior cortada da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Nos Exercícios 10 a 14, calcule a área da superfície dada através de sua forma implícita ou explícita.

10. Encontre a área da superfície cortada do parabolóide $x^2 + y^2 - z = 0$ pelo plano $z = 2$
11. Encontre a área da superfície $x^2 - 2y - 2z = 0$ que está acima do triângulo delimitado pelas retas $x = 2$, $y = 0$ e $y = 3x$ no plano xy .
12. Encontre a área da da porção do parabolóide $x = 4 - y^2 - z^2$ que está acima do anel $1 \leq y^2 + z^2 \leq 4$ no plano yz .
13. Encontre a área da superfície $x^2 - 2 \ln x + \sqrt{5}y - z = 0$ acima do quadrado $R: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$, no plano xy .

1.12. Integrais de Superfície

Para calcular quantidades como o escoamento de um líquido através de uma membrana curva ou a força ascendente em um paraquedas no ar, precisamos integrar uma função sobre uma superfície curva no espaço. Esse conceito de uma *integral de superfície* é uma extensão da ideia de uma integral de linha para integração sobre curva.

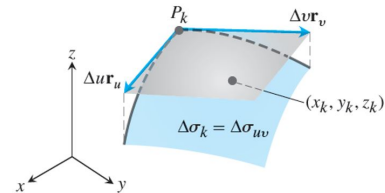
Suponha que tenhamos uma carga elétrica distribuída sobre uma superfície S e que a função $G(x, y, z)$ forneça a *densidade de carga* (carga por unidade de área) em cada ponto de S . Então, podemos calcular a carga total em S como uma integral da forma a seguir.

Considere que a superfície S seja definida parametricamente sobre uma região R do plano uv ,

$$\mathbf{R}(u, v) = f(u, v)\mathbf{i} + g(u, v)\mathbf{j} + h(u, v)\mathbf{k}, \quad (u, v) \in R.$$

A figura ao lado, vemos como uma subdivisão de R (considerada como um retângulo para simplificar) divide a superfície S nos elementos de superfície curvos correspondentes, ou pedaços, de área

$$\Delta\sigma_{uv} \approx \|\mathbf{R}_u \times \mathbf{R}_v\| \, dudv.$$



Conforme foi feito para a definição de integrais duplas, enumeramos os elementos de área de superfície em alguma ordem com suas áreas dadas por $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$. Para formar uma soma de Riemann sobre S , escolhemos um ponto (x_k, y_k, z_k) no k -ésimo pedaço, multiplicamos o valor da função G naquele ponto pela área $\Delta\sigma_k$ e somamos os produtos:

$$\sum_{k=1}^n G(x_k, y_k, z_k) \Delta\sigma_k.$$

Dependendo de como escolhemos (x_k, y_k, z_k) no k -ésimo fragmento, podemos obter valores diferentes para essa soma de Riemann. Então, definimos o limite à medida que o número de pedaços da superfície cresce, suas áreas encolhem para zero e $\Delta u \rightarrow 0$ e $\Delta v \rightarrow 0$. Esse limite, sempre que existir, independente de todas as escolhas feitas, define a **integral de superfície de G sobre S** como

$$\iint_S G(x, y, z) \, d\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n G(x_k, y_k, z_k) \Delta\sigma_k. \quad (1.12.1)$$

Observe a analogia com a definição de integral dupla e com a integral de linha. Se S é uma superfície lisa por partes e G é contínua sobre S então, pode-se mostrar que a integral definida na equação 1.12.1 existe.

A forma de se calcular a integral de superfície depende da forma na qual a superfície S é descrita – parametricamente, implícita ou explicitamente.

Formas de se calcular uma integral de superfície

1- Para uma superfície lisa S definida parametricamente por $\mathbf{R}(u, v) = f(u, v)\mathbf{i} + g(u, v)\mathbf{j} + h(u, v)\mathbf{k}$, $(u, v) \in R$, e uma função contínua $G(x, y, z)$ definida em S , a integral de superfície de G sobre S é fornecida pela integral dupla sobre R ,

$$\iint_S G(x, y, z) d\sigma = \iint_R G(f(u, v), g(u, v), h(u, v)) \|\mathbf{R}_u \times \mathbf{R}_v\| dudv \quad (1.12.2)$$

2- Para uma superfície S fornecida implicitamente por $F(x, y, z) = c$, onde F é uma função continuamente derivável, com S acima de sua região fechada e limitada R no plano coordenado abaixo dela, a integral de superfície da função contínua G sobre S é fornecida pela integral dupla sobre R ,

$$\iint_S G(x, y, z) d\sigma = \iint_R G(x, y, z) \frac{\|\nabla F\|}{|\nabla F \cdot \mathbf{p}} dA \quad (1.12.3)$$

onde \mathbf{p} é um vetor unitário normal a R e $\nabla F \cdot \mathbf{p} \neq 0$.

3- Para uma superfície S fornecida explicitamente como o gráfico de $z = f(x, y)$, onde f é uma função continuamente derivável sobre uma região R no plano xy , a integral de superfície da função contínua G sobre S é dada pela integral dupla sobre R ,

$$\iint_S G(x, y, z) d\sigma = \iint_R G(x, y, f(x, y)) \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1} dx dy \quad (1.12.4)$$

A integral de superfície da equação 1.12.1 assume diferentes significados em diferentes aplicações. Se G tem o valor constante igual a 1, a integral fornece a área de S . Se G fornece a densidade de massa de uma casca fina de material modelado por S , a integral fornece a massa da casca. Se G fornece a densidade de carga de uma casca fina, então a integral fornece a carga total.

Exemplo 1.12.1

Integre $G(x, y, z) = x^2$ sobre o cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \leq z \leq 1$.

Solução: Utilizando a equação 1.12.2 e cálculos realizados em exemplos anteriores,

temos $\|\mathbf{R}_r \times \mathbf{R}_\theta\| = r\sqrt{2}$ e

$$\begin{aligned} \iint_S x^2 d\sigma &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r^2 \cos^2 \theta)(r\sqrt{2}) dr d\theta \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r^3 \cos^2 \theta) dr d\theta \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \frac{\sqrt{2}}{4} \left[\frac{\theta}{2} + \frac{1}{4} \sin(2\theta) \right]_0^{2\pi} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

Se a medida da densidade de massa por unidade de área no ponto (x, y, z) sobre uma superfície S for $\rho(x, y, z)$ e se M for a medida da massa total de S , então

$$M = \iint_S \rho(x, y, z) d\sigma$$

Exemplo 1.12.2

Ache a massa da parte do plano $x+y+z = 1$ no primeiro octante, se a densidade em qualquer ponto (x, y, z) sobre a superfície for kx^2 kg/m², onde k é uma constante.

Solução: Podemos considerar a superfície plana como parte da superfície de nível $F(x, y, z) = x + y + z = 1$. A projeção sobre o plano xy resulta na região $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\}$. Um vetor normal unitário à região R é $\mathbf{p} = \mathbf{k}$. Em qualquer parte do plano, temos

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= x + y + z = 1 \\ \nabla F &= \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k} \\ \|\nabla F\| &= \sqrt{3} \\ |\nabla F \cdot \mathbf{p}| &= |\nabla F \cdot \mathbf{k}| = 1 \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} M &= \iint_S k^2 d\sigma = \iint_R kx^2 \frac{\|\nabla F\|}{|\nabla F \cdot \mathbf{k}|} dA \\ &= k \iint_R x^2 \frac{\sqrt{3}}{1} dA = \sqrt{3}k \int_0^1 \int_0^{1-x} x^2 dy dx \\ &= \sqrt{3}k \int_0^1 x^2(1-x) dx = \sqrt{3}k \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\sqrt{3}k}{12}. \end{aligned}$$

Portanto, a massa é $\frac{\sqrt{3}k}{12}$ kg.

• • •

1.12.1. Orientação

Dizemos que uma superfície lisa S é **orientável** se for possível definir um campo \mathbf{N} de vetores normais sobre S que variam continuamente com a posição. Qualquer pedaço de uma superfície orientável é orientável. Esferas e outras superfícies lisas no espaço são orientáveis. Convencionamos que \mathbf{N} sobre uma superfície fechada aponta para fora.

Uma vez escolhido \mathbf{N} , dizemos que **orientamos** a superfície. O vetor \mathbf{N} em qualquer ponto é chamado de **sentido positivo** nesse ponto.

• • •

1.12.2. Integral de superfície para fluxo

Definição 1.12.1

O **fluxo** de um campo vetorial tridimensional \mathbf{F} através de uma superfície orientada S na direção de \mathbf{N} é

$$\text{Fluxo} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} d\sigma \quad (1.12.5)$$

Se \mathbf{F} é o campo de velocidades de um fluido tridimensional, o fluxo de \mathbf{F} através de S é a taxa líquida com que o fluido atravessa S no sentido positivo escolhido.

Se S é parte de uma superfície de nível $F(x, y, z) = c$, então \mathbf{N} pode ser tomado como um dos dois campos

$$\mathbf{N} = \pm \frac{\nabla F}{\|\nabla F\|}, \quad (1.12.6)$$

dependendo de qual for o sentido preferido. O fluxo correspondente é

$$\begin{aligned} \text{Fluxo} &= \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} d\sigma \\ &= \iint_R \left(\mathbf{F} \cdot \frac{\pm \nabla F}{\|\nabla F\|} \right) \frac{\|\nabla F\|}{|\nabla F \cdot \mathbf{p}|} dA \\ &= \iint_R \mathbf{F} \cdot \frac{\pm \nabla F}{|\nabla F \cdot \mathbf{p}|} dA \end{aligned}$$

Exemplo 1.12.3

O campo de velocidades de um fluido é dado por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = 5z\mathbf{k}$$

e a superfície S é a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$. Ache o fluxo de \mathbf{F} através de S , se o comprimento for medido em centímetros e o tempo em horas.

Solução: A região R , projeção da esfera no plano xy é limitada pela circunferência $x^2 + y^2 = 16$ Como $F(x, y, z) = 5z\mathbf{k}$, $M = 0$, $N = 0$ e $P = 5z$. O fluxo de \mathbf{F} através de S é

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} d\sigma = \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_1 d\sigma + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_2 d\sigma \quad (1.12.7)$$

onde S_1 é a metade superior da esfera e S_2 é a metade inferior. Para S_1 , $\mathbf{N}_1 = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$ é o vetor normal unitário superior onde $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $z \geq 0$ é a superfície de nível representando a calota superior da esfera. Assim, tomando $\mathbf{p} = \mathbf{k}$, obtemos

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_1 d\sigma &= \iint_R (5z\mathbf{k}) \cdot \frac{2(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})}{|2z|} dA \\ &= 5 \iint_R \frac{z^2}{z} dA = 5 \iint_R z dA \\ &= 5 \iint_R \sqrt{16 - x^2 - y^2} dA \\ &= 5 \int_0^{2\pi} \int_0^4 \sqrt{16 - r^2} r dr d\theta \\ &= 5 \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{3}(16 - r^2)^{3/2} \right]_0^4 d\theta \\ &= \frac{320}{3} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{640}{3}\pi. \end{aligned}$$

Para S_2 , temos que $\mathbf{N}_2 = -\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$ é o vetor normal unitário inferior onde $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $z \leq 0$ é a superfície de nível representando a ca-

lota inferior da esfera. Assim, tomando $\mathbf{p} = -\mathbf{k}$, obtemos

$$\begin{aligned} \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_2 d\sigma &= \iint_R (5z\mathbf{k}) \cdot \frac{2(-x\mathbf{i} - y\mathbf{j} - z\mathbf{k})}{|2z|} dA \\ &= -5 \iint_R \frac{z^2}{|z|} dA = -5 \iint_R |z| dA \\ &= 5 \iint_R \sqrt{16 - x^2 - y^2} dA \\ &= \frac{640}{3}\pi. \end{aligned}$$

Assim, de (1.12.7),

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} d\sigma = \frac{640}{3}\pi + \frac{640}{3}\pi = \frac{1280}{3}\pi$$

Logo, a taxa de escoamento do fluido através da esfera, isto é, o fluxo é de $\frac{1280}{3}\pi \text{ cm}^3/h$.

• • •

1.12.3. Lista de exercícios

Nos exercícios de 01 a 07, calcule a integral de superfície $\iint_S G(x, y, z) d\sigma$ para G e S dados.

1. $G(x, y, z) = z$; S é o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ acima do plano xy .
2. $G(x, y, z) = x + 2y - z$; S é a parte do plano $x + y + z = 2$ no primeiro octante.
3. $G(x, y, z) = xyz$; S é a parte do plano $2x + 3y + z = 6$ no primeiro octante.
4. $G(x, y, z) = x$; S é a parte do cilindro $z = x^2$ no primeiro octante, limitada pelos planos coordenados e pelos planos $x = 1$ e $y = 2$.
5. $G(x, y, z) = z^2$; S é a parte do cone $x^2 + y^2 = z^2$ entre os planos $z = 1$ e $z = 2$.
6. $G(x, y, z) = x + y$; S é a parte do plano $4x + 3y + 6z = 12$ no primeiro octante.
7. $G(x, y, z) = xyz$; S é a parte do cilindro $x^2 + y^2 = 4$ entre os planos $y = 1$ e $y = 3$.

Nos exercícios de 8 a 10, ache a massa da superfície S dada, se a densidade de massa por unidade de área em qualquer ponto (x, y, z) na superfície é $\rho(x, y, z)$ kg/m².

8. S é o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ acima do plano xy ; $\rho(x, y, z) = k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, onde k é uma constante.
9. S é a parte do parabolóide $z = 9 - x^2 - y^2$ acima do plano xy ; $\rho(x, y, z) = 1/\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}$.
10. S é a parte do cone $x^2 + y^2 = z^2$ entre os planos $z = 2$ e $z = 3$; $\rho(x, y, z) = y^2z^2$.

Nos Exercícios 11 a 13, ache o fluxo de \mathbf{F} através da superfície S onde $\mathbf{F}(x, y, z)$ dá o campo de velocidades de um fluido.

11. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$; S é a parte do plano $3x + 2y + z = 6$ no primeiro octante.
12. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$; S é o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, acima do plano xy .
13. $\mathbf{F}(x, y, z) = -2y\mathbf{i} + 2x\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$; S é o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, acima do plano xy .

1.13. Teorema da Divergência de Gauss e Teorema de Stokes

• • •

1.13.1. Teorema da Divergência de Gauss

O teorema da divergência de Gauss diz que, sob condições adequadas, o fluxo exterior de um campo vetorial através de uma superfície fechada é igual à integral tripla da divergência do campo sobre a região delimitada pela superfície.

Teorema 1.13.1 (Teorema da Divergência de Gauss no Espaço)

Seja \mathbf{F} um campo vetorial cujos componentes tenha derivadas parciais de primeira ordem contínuas, e seja S uma superfície fechada, orientada e lisa por partes. O fluxo de \mathbf{F} através de S na direção do campo normal unitário exterior da superfície \mathbf{N} é igual à integral do divergente de \mathbf{F} sobre a região D delimitada pela superfície.

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, d\sigma = \iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV. \quad (1.13.1)$$

Exemplo 1.13.1

Use o teorema da divergência de Gauss para resolver o exemplo 1.11.10 da seção anterior.

Solução: $\mathbf{F}(x, y, z) = 5z\mathbf{k}$ e S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$. Do teorema da divergência de Gauss, o fluxo de \mathbf{F} através de S é

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, d\sigma = \iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV.$$

Como $\mathbf{F}(x, y, z) = 5z\mathbf{k}$, $\text{div } \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial z}(5z)$; isto é, $\text{div } \mathbf{F} = 5$. Assim,

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, d\sigma = 5 \iiint_D dV.$$

Como o volume D é o da esfera de raio 4, temos

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, d\sigma = 5 \left[\frac{4}{3} \pi (4)^3 \right] = \frac{1280}{3} \pi.$$

Comparando a solução do exemplo anterior com aquela do exemplo 1.11.10 na seção anterior, observamos como o teorema da divergência de Gauss pode simplificar o cálculo de uma integral de superfície.

Exemplo 1.13.2

Se $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2y\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$, e S é o cubo no primeiro octante limitado pelos planos $x = 1, y = 1, z = 1$ e pelos planos coordenados, ache o fluxo de \mathbf{F} através de S .

Solução: O fluxo de \mathbf{F} através de S é

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, d\sigma.$$

Para calcular essa integral de superfície diretamente, teríamos que calcular seis integrais de superfície, uma para cada face do cubo. Aplicando o teorema da divergência de Gauss com

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = 2xy + 2y + x$$

temos

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, d\sigma &= \iiint_D \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (2xy + 2y + x) \, dzdydx \\ &= 2. \end{aligned}$$

...

1.13.2. O Teorema de Stokes no Espaço

Vimos que o teorema de Stokes no plano relaciona a circulação no sentido anti-horário de um campo vetorial ao redor de uma curva fechada lisa por partes C no plano xy a uma integral dupla sobre a região plana R delimitada por C . O teorema de Stokes no espaço relaciona a circulação de um campo vetorial ao redor da borda C de uma superfície orientada S a uma integral de superfície sobre S . Precisamos que a superfície seja **lisa por partes** o que significa que é uma união finita de superfícies lisas unindo-se ao longo de curvas lisas.

Teorema 1.13.2 (Teorema de Stokes no Espaço)

Seja S uma superfície orientada lisa por partes tendo uma borda lisa por partes C . Seja $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ um campo vetorial cujos componentes tenha derivadas parciais de primeira ordem contínuas em uma região aberta contendo S . Então a circulação de \mathbf{F} ao redor de C no sentido anti-horário com relação ao vetor normal unitário da superfície \mathbf{N} é igual à integral de $\nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}$ sobre S .

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, d\sigma \tag{1.13.2}$$

Observe, pela equação 1.13.2, que se duas superfícies orientadas diferentes S_1 e S_2 tem a mesma borda C , as integrais de seu rotacional são iguais:

$$\iint_{S_1} \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_1 d\sigma = \iint_{S_2} \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_2 d\sigma.$$

Ambas as integrais do rotacional são iguais à integral de circulação anti-horária à esquerda da equação 1.13.2 desde que os vetores normais unitários N_1 e N_2 orientem as superfícies corretamente.

Exemplo 1.13.3

Verifique o teorema de Stokes para o hemisfério $S : x^2 + y^2 + z^2 = 9, z \geq 0$, sua circunferência de borda $C : x^2 + y^2 = 9, z = 0$ e o campo $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$.

Solução: Calculamos a circulação no sentido anti-horário ao redor de C (quando visto de cima) usando a parametrização $\mathbf{R}(t) = 3 \cos t\mathbf{i} + 3 \sin t\mathbf{j}, 0 \leq t \leq 2\pi$:

$$d\mathbf{R} = (-3 \sin t dt)\mathbf{i} + (3 \cos t dt)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} = (3 \sin t)\mathbf{i} - (3 \cos t)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = -9 \sin^2 t dt - 9 \cos^2 t dt = -9 dt$$

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = \int_0^{2\pi} -9 dt = -18\pi.$$

Para a integral do rotacional de \mathbf{F} , temos

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

$$= (0 - 0)\mathbf{i} + (0 - 0)\mathbf{j} + (-1 - 1)\mathbf{k} = -2\mathbf{k}$$

$$\mathbf{N} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{3}$$

$$d\sigma = \frac{3}{z} dA$$

$$\nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} d\sigma = -\frac{2z}{3} \frac{3}{z} dA$$

e

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} d\sigma = \iint_R -2 dA = -18\pi.$$

A circulação ao redor da circunferência é igual à integral do rotacional sobre o hemisfério, como deveria ser.

Exemplo 1.13.4

Encontre a circulação do campo $\mathbf{F} = (x^2 - y)\mathbf{i} + 4z\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$ ao redor da curva C na qual o plano $z = 2$ encontra o cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, no sentido anti-horário quando visto de cima.

Solução: O teorema de Stokes nos permite encontrar a circulação integrando sobre a superfície do cone. Percorrer C no sentido anti-horário, visto de cima, corresponde a tomar a normal interior \mathbf{N} ao cone, a normal com uma coordenada z positiva.

Parametrizamos o cone como

$$\mathbf{R}(r, \theta) = (r \cos \theta)\mathbf{i} + (r \sin \theta)\mathbf{j} + r\mathbf{k}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq 2.$$

Então, temos,

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{R}_r \times \mathbf{R}_\theta}{\|\mathbf{R}_r \times \mathbf{R}_\theta\|} = \frac{(-r \cos \theta)\mathbf{i} - (r \sin \theta)\mathbf{j} + r\mathbf{k}}{r\sqrt{2}} = \frac{1}{r\sqrt{2}}(-\cos \theta\mathbf{i} - \sin \theta\mathbf{j} + \mathbf{k}).$$

$$d\sigma = r\sqrt{2}drd\theta.$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = -4\mathbf{i} - 2x\mathbf{j} + \mathbf{k} = -4\mathbf{i} - 2r \cos \theta\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Assim

$$\nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{2}}(4 \cos \theta + 2r \cos \theta \sin \theta + 1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(4 \cos \theta + r \sin 2\theta + 1)$$

e a circulação é

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} &= \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} d\sigma \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2}}(4 \cos \theta + r \sin 2\theta + 1)(r\sqrt{2} drd\theta) \\ &= 4\pi \end{aligned}$$

• • •

1.13.3. Lista de Exercícios

Nos exercícios de 1 a 4, encontre o fluxo de \mathbf{F} através de S pelo teorema da divergência de Gauss para o campo \mathbf{F} e a superfície S dados.

1. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$; S é a parte do plano $3x + 2y + z = 6$ no primeiro octante.
2. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$; S é o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, acima do plano xy .
3. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$; S é o cubo no primeiro octante, limitado pelos planos coordenados e pelos planos $x = 1, y = 1$ e $z = 1$.
4. $\mathbf{F}(x, y, z) = 3x\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$; S é o cubo no primeiro octante, limitado pelos planos coordenados e pelos planos $x = 1, y = 1$ e $z = 1$.

Nos exercícios 5 a 8, use o teorema da divergência de Gauss para calcular a integral de superfície $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, d\sigma$ para \mathbf{F} e S dados.

5. $F(x, y, z) = x^2yz\mathbf{i} + xy^2z\mathbf{j} + xyz^2\mathbf{k}$; S é o paralelepípedo no primeiro octante limitado pelos planos $x = 1, y = 2$ e $z = 3$.
6. $F(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$; S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.
7. $F(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$; S é a fronteira da região delimitada pelo cilindro $x^2 + y^2 = 9$, abaixo pelo plano xy e acima pelo plano $z = 4$.
8. $F(x, y, z) = 2x\mathbf{i} + 2yz\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$; S é a fronteira da região encerrada entre os planos coordenados e o plano $x + y + z = 1$.

Nos exercícios 9 a 12, use o teorema de Stokes para avaliar a integral de linha $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$ para \mathbf{F} e C .

9. $F(x, y, z) = 4y\mathbf{i} - 3z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$; C é o triângulo com vértices em $(1, 0, 0), (0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$.
10. $F(x, y, z) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$; C é a circunferência $x^2 + y^2 = 4$ no plano xy .
11. $F(x, y, z) = (2y + \sin^{-1} x)\mathbf{i} + e^{y^2}\mathbf{j} + (x + \ln(z^2 + 4))\mathbf{k}$; C é o triângulo com vértices em $(1, 0, 0), (0, 1, 0)$ e $(0, 0, 2)$.
12. $F(x, y, z) = (2z - e^x)\mathbf{i} + (x^3 + \sin y)\mathbf{j} + (y^2 - \tan z)\mathbf{k}$; C tem a equação vetorial $\mathbf{R}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Referências Bibliográficas

- [1] LEITHOLD, L.; *O Cálculo com Geometria Analítica*. 3^a Edição, São Paulo. SP.: Editora Harbra, 1994. v. 1.
- [2] LEITHOLD, L.; *O Cálculo com Geometria Analítica*. 3^a Edição, São Paulo. SP.: Editora Harbra, 1994. v. 2.
- [3] THOMAS, G. B.; WEIR, M. D.; HASS, J.; *Cálculo*, Vol. 2, 12^a Edição, São Paulo. SP: Pearson Editora, 2012. v. 1.
- [4] THOMAS, G. B.; WEIR, M. D.; HASS, J.; *Cálculo*, Vol. 2, 12^a Edição, São Paulo. SP: Pearson Editora, 2012. v. 2.
- [5] ANTON, H.; BIVENS, I. C.; DAVIS, S. L.; *Cálculo*. 10^a Edição, Porto Alegre: Bookman, 2014. v. 2.
- [6] AVILA, G.; *Cálculo da Funções de uma Variável*. 7^a Edição, Rio de Janeiro: LTC Editora, 2004. v. 2.
- [7] STEWART, J.; *Cálculo*. 4^a Edição, São Paulo. SP.: Pioneira Thomson Learning, 2004. v. 1.
- [8] STEWART, J.; *Cálculo*. 4^a Edição, São Paulo. SP.: Pioneira Thomson Learning, 2004. v. 2.