

**Não leve** este documento impresso para a prova.  
O professor fornecerá, para cada aluno, uma cópia no dia da prova.

# Resumão de Cálculo

©2005 Paul Dawkins – <http://tutorial.math.lamar.edu>

Versão brasileira por Rodrigo Hausen

Proibida a distribuição com fins comerciais.



# Sumário

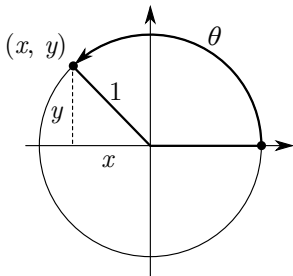
<b>1</b>	<b>Funções Trigonométricas</b>	<b>3</b>
1.1	Definição . . . . .	3
1.2	Propriedades . . . . .	3
1.3	Fórmulas e Identidades . . . . .	4
1.4	Tabela de valores . . . . .	5
1.5	Funções trigonométricas inversas . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Limites</b>	<b>7</b>
2.1	Definições . . . . .	7
2.2	Relação entre o limite e os limites laterais . . . . .	7
2.3	Propriedades algébricas . . . . .	7
2.4	Teorema do confronto . . . . .	8
2.5	Limites fundamentais . . . . .	8
2.6	Continuidade . . . . .	8
2.7	Teorema do Valor Intermediário . . . . .	9
2.8	Técnicas de avaliação de limites: exemplos de aplicação . . . . .	9
2.9	Regra de L'Hôpital . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Derivadas</b>	<b>10</b>
3.1	Definição e notação . . . . .	10
3.2	Interpretações para a derivada . . . . .	10
3.3	Propriedades algébricas . . . . .	10
3.4	Tabela de derivadas . . . . .	10
3.5	Segunda derivada e derivadas de ordem superior . . . . .	11
3.6	Derivação implícita . . . . .	11
3.7	Crescimento e concavidade . . . . .	12
3.8	Máximos e mínimos . . . . .	12
3.9	Teorema do Valor Médio . . . . .	13
3.10	Esboço de gráficos . . . . .	13
<b>4</b>	<b>Integrais</b>	<b>14</b>
4.1	Definições . . . . .	14
4.2	Teorema Fundamental do Cálculo . . . . .	14

4.3	Propriedades . . . . .	14
4.4	Fórmula de integração por substituição . . . . .	14
4.5	Fórmula de integração por partes . . . . .	14
4.6	Tabela de Integrais . . . . .	15
4.7	Técnicas de integração . . . . .	15
4.7.1	Como integrar por substituição . . . . .	15
4.7.2	Como integrar por partes . . . . .	16
4.7.3	Alguns produtos e quocientes entre funções trigonométricas .	16
4.7.4	Substituição trigonométrica . . . . .	17
4.7.5	Frações parciais . . . . .	18
<b>5</b>	<b>Aplicações</b>	<b>19</b>
5.1	Área (com sinal) entre uma curva e o eixo horizontal . . . . .	19
5.2	Áreas entre curvas . . . . .	19
5.3	Volumes de revolução . . . . .	19

# 1 Funções Trigonômicas

## 1.1 Definição

Considere um ponto  $(x, y)$  no círculo unitário. Seja  $\theta$  o comprimento do arco, medido no sentido anti-horário desde o ponto  $(1, 0)$  até o ponto  $(x, y)$ . Dizemos que  $\theta$  é a medida do ângulo em radianos.



Definimos:

$$\text{sen } \theta = y \quad \text{csc } \theta = \frac{1}{y}$$

$$\text{cos } \theta = x \quad \text{sec } \theta = \frac{1}{x}$$

$$\text{tan } \theta = \frac{y}{x} \quad \text{cot } \theta = \frac{x}{y}$$

## 1.2 Propriedades

**Domínio.** O domínio é o conjunto de todos os valores de  $\theta$  para os quais o valor da função está definido.

	domínio
sen	$\mathbb{R}$
cos	$\mathbb{R}$
tan	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; k \text{ inteiro} \right\}$
csc	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \text{ inteiro}\}$
sec	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; k \text{ inteiro} \right\}$
cot	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \text{ inteiro}\}$

**Período.** O período de uma função  $f$  é o menor número  $T > 0$  tal que  $f(x + T) = f(x)$ . Se  $a$  é uma constante e  $\theta$  é um ângulo medido em radianos, temos os seguintes períodos:

$$\text{sen}(a\theta) \rightarrow T = \frac{2\pi}{a}$$

$$\text{cos}(a\theta) \rightarrow T = \frac{2\pi}{a}$$

$$\text{tan}(a\theta) \rightarrow T = \frac{\pi}{a}$$

$$\text{csc}(a\theta) \rightarrow T = \frac{2\pi}{a}$$

$$\text{sec}(a\theta) \rightarrow T = \frac{2\pi}{a}$$

$$\text{cot}(a\theta) \rightarrow T = \frac{\pi}{a}$$

**Imagem.** A imagem é o conjunto de todos os valores possíveis que a função pode assumir.

$$\text{sen } \theta \in [-1, 1]$$

$$\text{csc } \theta \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

$$\text{cos } \theta \in [-1, 1]$$

$$\text{sec } \theta \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

$$\text{tan } \theta \in (-\infty, +\infty)$$

$$\text{cot } \theta \in (-\infty, +\infty)$$

## 1.3 Fórmulas e Identidades

### Tangente e Cotangente

$$\tan \theta = \frac{\sen \theta}{\cos \theta} \quad \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sen \theta}$$

### Identidades recíprocas

$$\csc \theta = \frac{1}{\sen \theta} \quad \sen \theta = \frac{1}{\csc \theta}$$

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} \quad \cos \theta = \frac{1}{\sec \theta}$$

$$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} \quad \tan \theta = \frac{1}{\cot \theta}$$

### Identidades pitagóricas

$$\sen^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\sec^2 \theta - \tan^2 \theta = 1$$

$$\csc^2 \theta - \cot^2 \theta = 1$$

### Paridade

$$\sen(-\theta) = -\sen \theta \quad \csc(-\theta) = -\csc \theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos \theta \quad \sec(-\theta) = \sec \theta$$

$$\tan(-\theta) = -\tan \theta \quad \cot(-\theta) = -\cot \theta$$

### Fórmulas periódicas

Seja  $k$  um inteiro.

$$\sen(\theta + 2k\pi) = \sen \theta$$

$$\csc(\theta + 2k\pi) = \csc \theta$$

$$\cos(\theta + 2k\pi) = \cos \theta$$

$$\sec(\theta + 2k\pi) = \sec \theta$$

$$\tan(\theta + k\pi) = \tan \theta$$

$$\cot(\theta + k\pi) = \cot \theta$$

### Fórmulas de dobro de ângulo

$$\sen(2\theta) = 2 \sen \theta \cos \theta$$

$$\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sen^2 \theta$$

$$= 2 \cos^2 \theta - 1$$

$$= 1 - 2 \sen^2 \theta$$

$$\tan(2\theta) = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$

### Conversão de graus para radianos

Seja  $x$  um ângulo em graus e  $t$  o ângulo correspondente em radianos.

$$\frac{\pi}{180} = \frac{t}{x} \Rightarrow t = \frac{\pi x}{180} \quad \text{e} \quad x = \frac{180t}{\pi}$$

### Fórmulas de metade de ângulo

$$\sen^2 \theta = \frac{1}{2} [1 - \cos(2\theta)]$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{2} [1 + \cos(2\theta)]$$

$$\tan^2 \theta = \frac{1 - \cos(2\theta)}{1 + \cos(2\theta)}$$

### Fórmulas de soma e diferença

$$\sen(\alpha \pm \beta) = \sen \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sen \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sen \alpha \sen \beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

### Fórmulas de produto para soma

$$\sen \alpha \sen \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\sen \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sen(\alpha + \beta) + \sen(\alpha - \beta)]$$

$$\cos \alpha \sen \beta = \frac{1}{2} [\sen(\alpha + \beta) - \sen(\alpha - \beta)]$$

### Fórmulas de soma para produto

$$\sen \alpha + \sen \beta = 2 \sen \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

$$\sen \alpha - \sen \beta = 2 \cos \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sen \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sen \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sen \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

## Fórmulas de complemento de ângulo

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) &= \cos \theta & \cos \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) &= \operatorname{sen} \theta & \tan \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) &= \operatorname{cot} \theta \\ \operatorname{csc} \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) &= \sec \theta & \sec \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) &= \operatorname{csc} \theta & \operatorname{cot} \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) &= \tan \theta \end{aligned}$$

## 1.4 Tabela de valores

ângulo em radianos	ângulo em graus	seno	cosseno	tangente
$0 = 2\pi$	$0^\circ = 360^\circ$	0	1	0
$\frac{\pi}{6} = -\frac{11\pi}{6}$	$30^\circ = -330^\circ$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{4} = -\frac{7\pi}{4}$	$45^\circ = -315^\circ$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3} = -\frac{5\pi}{3}$	$60^\circ = -300^\circ$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi}{2}$	$90^\circ = -270^\circ$	1	0	indef.
$\frac{2\pi}{3} = -\frac{4\pi}{3}$	$120^\circ = -240^\circ$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
$\frac{3\pi}{4} = -\frac{5\pi}{4}$	$135^\circ = -225^\circ$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
$\frac{5\pi}{6} = -\frac{7\pi}{6}$	$150^\circ = -210^\circ$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\pi = -\pi$	$180^\circ = -180^\circ$	0	-1	0
$\frac{7\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6}$	$210^\circ = -150^\circ$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{5\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}$	$225^\circ = -135^\circ$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{4\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3}$	$240^\circ = -120^\circ$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{3\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$	$270^\circ = -90^\circ$	-1	0	indef.
$\frac{5\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}$	$300^\circ = -60^\circ$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
$\frac{7\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$	$315^\circ = -45^\circ$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
$\frac{11\pi}{6} = -\frac{\pi}{6}$	$330^\circ = -30^\circ$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

## 1.5 Funções trigonométricas inversas

### Definição

$y = \text{sen}^{-1} x$  equivale a  $x = \text{sen } y$

$y = \text{cos}^{-1} x$  equivale a  $x = \text{cos } y$

$y = \text{tan}^{-1} x$  equivale a  $x = \text{tan } y$

$y = \text{csc}^{-1} x$  equivale a  $x = \text{csc } y$

$y = \text{sec}^{-1} x$  equivale a  $x = \text{sec } y$

$y = \text{cot}^{-1} x$  equivale a  $x = \text{cot } y$

### Notação alternativa

$\text{sen}^{-1} x = \arcsen x$      $\text{csc}^{-1} x = \text{arccsc } x$

$\text{cos}^{-1} x = \arccos x$      $\text{sec}^{-1} x = \text{arcsec } x$

$\text{tan}^{-1} x = \arctan x$      $\text{cot}^{-1} x = \text{arccot } x$

### Domínio e imagem

função	domínio	imagem
$y = \text{sen}^{-1} x$ ,	$-1 \leq x \leq 1$	$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$
$y = \text{cos}^{-1} x$ ,	$-1 \leq x \leq 1$	$0 \leq y \leq \pi$
$y = \text{tan}^{-1} x$ ,	$x \in \mathbb{R}$	$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$
$y = \text{csc}^{-1} x$ ,	$x \leq -1$ ou $x \geq 1$	$-\frac{\pi}{2} < y < 0$ ou $0 < y \leq \frac{\pi}{2}$
$y = \text{sec}^{-1} x$ ,	$x \leq -1$ ou $x \geq 1$	$0 \leq y < \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{\pi}{2} < y \leq \pi$
$y = \text{cot}^{-1} x$ ,	$x \in \mathbb{R}$	$0 < y < \pi$

### Composições entre funções trigonométricas e inversas

Composições do tipo  $f(g^{-1}(x))$ , onde  $f$  é função trigonométrica e  $g^{-1}$  é função trigonométrica inversa. Ex.:  $\text{sec}(\text{tan}^{-1} x) = \sqrt{1+x^2}$ .

Obs.: esta tabela **não pode ser usada** para composições do tipo  $g^{-1}(f(x))$ .

	$\text{sen}^{-1}$	$\text{cos}^{-1}$	$\text{tan}^{-1}$	$\text{csc}^{-1}$	$\text{sec}^{-1}$	$\text{cot}^{-1}$
sen	$x$	$\sqrt{1-x^2}$	$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}$	$\frac{1}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$
cos	$\sqrt{1-x^2}$	$x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$
tan	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	$x$	$\frac{1}{x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$	$x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}$	$\frac{1}{x}$
csc	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$	$x$	$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$	$x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$
sec	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{1+x^2}$	$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$	$x$	$\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$
cot	$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{x}$	$x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}$	$\frac{1}{x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$	$x$

## 2 Limites

### 2.1 Definições

**Limite:** Dizemos que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  se para todo  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que, toda vez que  $0 < |x - a| < \delta$ , então  $|f(x) - L| < \epsilon$ .

Intuitivamente,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  se podemos fazer  $f(x)$  tão próximo de  $L$  quanto quisermos ao tomarmos  $x$  suficientemente próximo de  $a$ , em ambos os lados de  $a$ , mas com  $x \neq a$ .

**Limite pela direita:**  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$  se para todo  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que, toda vez que  $a < x < a + \delta$ , então  $|f(x) - L| < \epsilon$ .

**Limite pela esquerda:**  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$  se para todo  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que, toda vez que  $a - \delta < x < a$ , então  $|f(x) - L| < \epsilon$ .

### Limites no infinito:

Dizemos que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$  se para todo  $\epsilon > 0$  existe  $M > 0$  tal que, toda vez que  $x > M$ , então  $|f(x) - L| < \epsilon$ .

Dizemos que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$  se para todo  $\epsilon > 0$  existe  $N < 0$  tal que, toda vez que  $x < N$ , então  $|f(x) - L| < \epsilon$ .

### Limites infinitos:

Dizemos que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  se para todo  $M > 0$  existe  $\delta < 0$  tal que, toda vez que  $0 < |x - a| < \delta$ , então  $f(x) > M$ .

Dizemos que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$  se para todo  $N > 0$  existe  $\delta < 0$  tal que, toda vez que  $0 < |x - a| < \delta$ , então  $f(x) < -N$ . Podemos definir similarmente limites laterais infinitos.

### 2.2 Relação entre o limite e os limites laterais

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  se, e somente se,  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$  e  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$

Se  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ , então  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  não existe.

### 2.3 Propriedades algébricas

Suponha que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  e  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ , onde  $L$  e  $M$  são números reais. Seja  $c$  uma constante real.

1.  $\lim_{x \rightarrow a} [cf(x)] = cL$

2.  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = L \pm M$

3.  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = L \cdot M$

4.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$ , se  $M \neq 0$ .

5.  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^c = L^c$ .

Obs.: se  $c < 0$ , é preciso que  $L > 0$ .

6.  $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[c]{f(x)} = \sqrt[c]{L}$ .

Obs.: se  $c$  é par, é preciso que  $L \geq 0$ .

## 2.4 Teorema do confronto

Se, para todo  $x \in I$ , onde  $I$  é um intervalo aberto que contém  $a$ , valem:

$$(1) f(x) \leq g(x) \leq h(x); \quad \text{e} \quad (2) \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L.$$

Então  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$ .

## 2.5 Limites fundamentais

Todos os limites abaixo podem ser demonstrados diretamente a partir da definição e/ou usando o teorema do confronto.

- $\lim_{x \rightarrow a} c = c$
- $\lim_{x \rightarrow a} x = a$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e = 2,71828\dots$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$
- Se  $c > 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^c} = 0$
- Se  $c > 0$  e  $x^c$  real para  $x$  negativo, então  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^c} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$
- Se  $c$  par,  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^c = +\infty$
- Se  $c$  ímpar,  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^c = \pm\infty$

## 2.6 Continuidade

**Definição:** Dizemos que  $f$  é contínua em  $a$  se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

Dizemos que  $f$  é contínua em um intervalo  $I$  se  $f$  é contínua para todo  $a \in I$ .

**Teorema.** São funções contínuas

- Polinomiais:  $p(x)$ , para todo  $x$
- Racionais:  $\frac{p(x)}{q(x)}$ , onde  $q(x) \neq 0$
- Se  $n$  ímpar,  $\sqrt[n]{x}$  para todo  $x$
- Se  $n$  par,  $\sqrt[n]{x}$  para  $x \geq 0$
- $e^x$  para todo  $x$
- $\ln(x)$  para  $x > 0$
- $\cos(x)$  e  $\sin(x)$  para todo  $x$
- $\tan(x)$  e  $\sec(x)$  para  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ , onde  $k = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$
- $\cot(x)$  e  $\csc(x)$  para  $x \neq k\pi$ , onde  $k = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$
- Trigonométricas inversas, nos seus respectivos domínios (Sec. 1.5)

**Limite de função composta.** Se  $f$  é contínua em  $b$  e  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$ , então

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} g(x)\right) = f(b)$$

## 2.7 Teorema do Valor Intermediário

Seja  $f$  uma função contínua em  $[a, b]$  e  $M$  um número tal que  $f(a) < M < f(b)$  ou  $f(a) > M > f(b)$ , ou seja,  $M$  é um valor intermediário entre  $f(a)$  e  $f(b)$ .

Então existe  $c \in (a, b)$  tal que  $f(c) = M$ .

## 2.8 Técnicas de avaliação de limites: exemplos de aplicação

### Fatoração e cancelamento de fatores

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 4x - 12}{x - 2x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 6)}{x(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 6}{x} = \frac{8}{2} = 4$$

### Multiplicação e divisão pelo conjugado

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 9} \frac{3 - \sqrt{x}}{x^2 - 81} &= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{3 - \sqrt{x}}{x^2 - 81} \frac{3 + \sqrt{x}}{3 + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{9 - x}{(x^2 - 81)(3 + \sqrt{x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{-1}{(x + 9)(3 + \sqrt{x})} = \frac{-1}{(9 + 9)(3 + \sqrt{9})} = -\frac{1}{108} \end{aligned}$$

### Combinando expressões racionais

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \frac{1}{x + h} - \frac{1}{x} \right) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \frac{x - (x + h)}{x(x + h)} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \frac{-h}{x(x + h)} \right) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{x(x + h)} = -\frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

### Limites no infinito de funções racionais

Sejam  $p(x)$  e  $q(x)$  polinômios. Para calcular  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{p(x)}{q(x)}$ , coloque em evidência, tanto no numerador quanto no denominador, a maior potência de  $q(x)$  e calcule o limite.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - 4}{5x - 2x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \left( 3 - \frac{4}{x^2} \right)}{x^2 \left( \frac{5}{x} - 2 \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 - \frac{4}{x^2}}{\frac{5}{x} - 2} = \frac{3 - 0}{0 - 2} = -\frac{3}{2}.$$

### Funções definidas por partes

$$\lim_{x \rightarrow -2} g(x), \text{ onde } g(x) = \begin{cases} x^2 + 5 & \text{se } x < -2 \\ 1 - 3x & \text{se } x \geq -2 \end{cases}$$

Calcule os dois limites laterais  $\lim_{x \rightarrow -2^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} x^2 + 5 = 9$  e  $\lim_{x \rightarrow -2^+} g(x) =$

$\lim_{x \rightarrow -2^+} 1 - 3x = 7$ . Como os limites laterais diferem,  $\lim_{x \rightarrow -2} g(x)$  não existe.

Se os limites laterais forem iguais, o limite existirá e terá o mesmo valor.

## 2.9 Regra de L'Hôpital

Se  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$  ou se  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ , então  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ .

A regra vale também se substituirmos  $a$  por  $\pm\infty$  e também se  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty$ .

### 3 Derivadas

#### 3.1 Definição e notação

Seja  $f$  uma função real. A sua derivada é denotada  $f'$  e é definida por

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Se  $y = f(x)$ , então todas estas notações para a derivada são equivalentes:

$$f'(x) = y' = \frac{df}{dx} = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(f(x))$$

Se  $y = f(x)$ , então todas estas notações para a derivada avaliada em  $x = a$  são equivalentes:

$$f'(a) = [y']_{x=a} = \left[ \frac{df}{dx} \right]_{x=a} = \left[ \frac{dy}{dx} \right]_{x=a}$$

#### 3.2 Interpretações para a derivada

Se  $y = f(x)$  então,

1.  $m = f'(a)$  é a inclinação da reta tangente ao gráfico  $y = f(x)$  no ponto  $(a, f(a))$ , e a equação da reta tangente para  $x = a$  é dada por  $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ .

2.  $f'(a)$  é a taxa de variação instantânea de  $f(x)$  quando  $x = a$ .

3. Se  $f(x)$  é a posição de um objeto no instante  $x$ , então  $f'(a)$  é a velocidade do objeto no instante  $x = a$ .

#### 3.3 Propriedades algébricas

Sejam  $f(x)$  e  $g(x)$  funções diferenciáveis (a derivada existe).

1.  $(cf(x))' = cf'(x)$ ,  $c$  constante.

2.  $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$ .

3.  $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ .

4.  $\left( \frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

5. Regra da cadeia:

$$\frac{d}{dx}(f(g(x))) = f'(g(x))g'(x)$$

#### 3.4 Tabela de derivadas

$$\frac{d}{dx}(c) = 0, c \text{ constante}$$

$$\frac{d}{dx}(\ln(x)) = \frac{1}{x}, x > 0$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(x) = 1$$

$$\frac{d}{dx}(\ln|x|) = \frac{1}{x}, x \neq 0$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx}(\log_a(x)) = \frac{1}{x \ln(a)}, x > 0$$

$$\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$$

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(c^x) = c^x \ln(c), c \text{ constante}$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

(continua na próxima página)

## Derivadas de funções trigonométricas inversas

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) &= \frac{1}{1+x^2} \\ \frac{d}{dx}(\csc^{-1} x) &= -\frac{1}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} & \frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) &= \frac{1}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} & \frac{d}{dx}(\cot^{-1} x) &= -\frac{1}{1+x^2}\end{aligned}$$

## Derivadas de funções hiperbólicas

$$\text{Definimos } \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{e} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\sinh x) &= \cosh x & \frac{d}{dx}(\cosh x) &= \sinh x \\ \frac{d}{dx}(\sinh^{-1} x) &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} & \frac{d}{dx}(\cosh^{-1} x) &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\end{aligned}$$

## 3.5 Segunda derivada e derivadas de ordem superior

A segunda derivada é denotada  $f'' = f^{(2)} = \frac{d^2 f}{dx^2}$  e é definida por  $f''(x) = (f'(x))'$ , ou seja, é a derivada da primeira derivada  $f'(x)$ .

A  $n$ -ésima derivada é denotada  $f^{(n)} = \frac{d^n f}{dx^n}$  e é definida por  $f^{(n)} = (f^{(n-1)}(x))'$ , ou seja, é a derivada da  $(n-1)$ -ésima derivada  $f^{(n-1)}(x)$ .

## 3.6 Derivação implícita

Exemplo: determine  $y'$ , onde  $e^{2x-9y} + x^3y^2 = \sin(y) + 11x$ . Note que  $y$  depende de  $x$ . Portanto, considere  $y = f(x)$ , assim produtos/quocientes envolvendo  $x$  e  $y$  usarão a regra do produto/quociente e as derivadas envolvendo  $y$  usarão a regra da cadeia. O “macete” é derivar de ambos os lados da equação, tomando o cuidado de anexar um termo  $y'$  toda vez que  $y$  for derivado (por conta da regra da cadeia). Após derivar, isole  $y'$  de um dos lados da equação.

$$\begin{aligned}(e^{2x-9y} + x^3y^2)' &= (\sin(y) + 11x)' \\ e^{2x-9y}(2 - 9y') + 3x^2y^2 + 2x^3yy' &= \cos(y)y' + 11 \\ 2e^{2x-9y} - 9y'e^{2x-9y} + 3x^2y^2 + 2x^3yy' &= \cos(y)y' + 11 \\ [2x^3y - 9e^{2x-9y} - \cos(y)]y' &= 11 - 2e^{2x-9y} - 3x^2y^2 \\ y' &= \frac{11 - 2e^{2x-9y} - 3x^2y^2}{2x^3y - 9e^{2x-9y} - \cos(y)}\end{aligned}$$

## 3.7 Crescimento e concavidade

Nos resultados a seguir, considere  $I$  um intervalo e  $c$  uma constante.

### Pontos críticos

$x = c$  é um ponto crítico de  $f(x)$  se:

1.  $f'(c)$  não existe; ou
2.  $f'(c) = 0$ .

### Crescimento e decréscimo

1. Se  $f'(x) > 0$  para todo  $x \in I$ , então  $f$  é crescente em  $I$
2. Se  $f'(x) < 0$  para todo  $x \in I$ , então  $f$  é decrescente em  $I$
3. Se  $f'(x) = 0$  para todo  $x \in I$ , então  $f$  é constante em  $I$

## 3.8 Máximos e mínimos

### Máximos/mínimos globais

1.  $c$  é um máximo global de  $f$  se  $f(c) \geq f(x)$  para todo  $x \in \text{Dom } f$
2.  $c$  é um mínimo global de  $f$  se  $f(c) \leq f(x)$  para todo  $x \in \text{Dom } f$

### Máximos/mínimos locais

1.  $c$  é um máximo local de  $f$  se existe intervalo aberto  $I$  tal que  $c \in I$  e  $f(c) \geq f(x)$  para todo  $x \in I$
2.  $c$  é um mínimo local de  $f$  se existe intervalo aberto  $I$  tal que  $c \in I$  e  $f(c) \leq f(x)$  para todo  $x \in I$

### Teorema de Fermat

Se  $f$  tem um máximo/mínimo local em  $c$ , então  $c$  é um ponto crítico de  $f$ .

### Concavidade

1. Se  $f''(x) > 0$  para todo  $x \in I$ , então  $f$  é côncava para cima em  $I$
2. Se  $f''(x) < 0$  para todo  $x \in I$ , então  $f$  é côncava para baixo em  $I$

### Pontos de inflexão

$x = c$  é um ponto de inflexão de  $f(x)$  se a concavidade muda em  $x = c$ , ou seja, se  $f''$  muda de sinal em  $c$ .

### Teorema do Valor Extremo

Se  $f(x)$  é contínua no intervalo fechado  $[a, b]$ , então existem números  $c, d$  tais que: **1.**  $a \leq c, d \leq b$ ; **2.**  $f(c)$  é máximo global de  $f$  em  $[a, b]$ ; **3.**  $f(d)$  é mínimo global de  $f$  em  $[a, b]$ .

### Encontrando máx/mín absolutos

Para encontrar máximos/mínimos absolutos de uma função contínua  $f(x)$  no intervalo  $[a, b]$  use o processo a seguir:

1. Encontre todos os pontos críticos de  $f$  em  $[a, b]$
2. Avalie  $f(x)$  para todos os pontos encontrados no passo 1
3. Avalie  $f(a)$  e  $f(b)$
4. identifique o valor máx absoluto (maior valor da função) e o valor mín absoluto (menor valor da função) entre os valores avaliados nos passos 2 e 3.

## Encontrando máximos/mínimos relativos, classificando pontos críticos

1. Encontre todos os pontos críticos de  $f$ .
2. Aplique o teste da 1ª derivada ou da 2ª derivada a cada ponto crítico.

**Teste da 1ª derivada.** Se  $c$  é um ponto crítico de  $f$ , então  $c$  é...

1. máx local se  $f'(x) > 0$  imediatamente à esquerda de  $c$  e  $f'(x) < 0$  imediatamente à direita de  $c$ .
2. mín local se  $f'(x) < 0$  imediatamente à esquerda de  $c$  e  $f'(x) > 0$  imediatamente à direita de  $c$ .
3. não é nem máx nem mín local se  $f'(x)$  tem o mesmo sinal em ambos os lados de  $c$

**Teste da 2ª derivada.** Se  $c$  é um ponto crítico de  $f$  tal que  $f'(c) = 0$ , então  $c$  é...

1. máx local se  $f''(c) < 0$
2. mín local se  $f''(c) > 0$
3. se  $f''(c) = 0$ , é preciso usar outro método para classificar  $c$  (p. ex. o teste da 1ª derivada)

## 3.9 Teorema do Valor Médio

Se  $f$  é contínua no intervalo fechado  $[a, b]$  e diferenciável no intervalo aberto  $(a, b)$ , então existe  $c$  tal que  $a < c < b$  e  $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ .

## 3.10 Esboço de gráficos

Para esboçar o gráfico  $y = f(x)$ :

1. Determine o domínio de  $f$
2. Determine as interseções com o eixo horizontal ( $f(x) = 0$ ) e vertical ( $y = f(0)$ ).
3. Identifique simetrias:  
é função par  $f(-x) = f(x)$ ? função ímpar  $f(-x) = -f(x)$ ?
4. Identifique assíntotas:  
Horizontais: retas  $y = L$  e/ou  $y = M$  onde  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = M$   
Verticais: retas  $x = K$  onde  $\lim_{x \rightarrow K^+} f(x) = \pm\infty$  ou  $\lim_{x \rightarrow K^-} f(x) = \pm\infty$
5. Determine os pontos críticos, analise crescimento e concavidade e marque os máximos/mínimos locais e globais e pontos de inflexão.
6. Esboce a curva, passando pelos pontos de interesse (interseções com os eixos e pontos críticos) e considerando as informações obtidas nos passos anteriores (crescimento, concavidade, assíntotas, simetrias, ...)

## 4 Integrais

### 4.1 Definições

**Integral definida.** Dada  $f$  definida em  $[a, b]$ , divida  $[a, b]$  em  $n$  intervalos menores de comprimento  $\Delta x = (b - a)/n$  e escolha um  $x_j$  em cada intervalo.

$$\text{Então } \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n f(x_j) \Delta x$$

**Antiderivada.** Uma antiderivada de  $f$  é uma função  $F$  tal que  $F'(x) = f(x)$ .

**Integral indefinida.**  $\int f(x) dx = F(x) + C$ , onde  $F$  é uma antiderivada de  $f$ .

### 4.2 Teorema Fundamental do Cálculo

**Parte 1.** Seja  $f$  contínua em  $[a, b]$  e considere  $g(x) = \int_a^x f(t) dt$ . Então,  $g$  é contínua em  $[a, b]$  e  $g$  é uma antiderivada de  $f$ .

**Parte 2.** Seja  $f$  contínua em  $[a, b]$  e  $F$  uma antiderivada de  $f$ . Então  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ .

**Notação:**  $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ .

### 4.3 Propriedades

$$\int f(x) \pm g(x) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx \qquad \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

$$\int_a^b f(x) \pm g(x) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

Seja  $c$  uma constante:  
 $\int c f(x) dx = c \int f(x) dx$

$$\int_a^b c f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^b c dx = c(b - a)$$

Se  $f(x) \geq g(x)$  para todo  $x \in [a, b]$ , então  $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$

Se  $f(x) \geq 0$  para todo  $x \in [a, b]$ , então  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$

Se  $m \leq f(x) \leq M$  para todo  $x \in [a, b]$ , então  $m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a)$

### 4.4 Fórmula de integração por substituição

Para calcular  $\int_a^b f(g(x))g'(x) dx$ , faça  $u = g(x)$  e substitua:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du$$

### 4.5 Fórmula de integração por partes

$$\int_a^b u dv = [uv]_a^b - \int_a^b v du$$

Exemplos de uso da integração por substituição e por partes na Seção 4.7.

## 4.6 Tabela de Integrais

Na tabela abaixo, considere  $a, b, n, k, C$  constantes.

### Elementares

$$\int k \, dx = kx + C$$

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \text{ se } n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C$$

$$\int \frac{1}{ax+b} \, dx = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C$$

### Exponenciais e logarítmicas

$$\int e^x \, dx = e^x + C$$

$$\int e^{ax} \, dx = \frac{e^{ax}}{a} + C$$

$$\int \ln(x) \, dx = x \ln(x) - x + C$$

### Racionais

$$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \tan^{-1} x + C$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2} \, dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \left( \frac{x}{a} \right) + C$$

$$\int \frac{x^2}{a^2+x^2} \, dx = x - a \tan^{-1} \left( \frac{x}{a} \right) + C$$

$$\int \frac{1}{(x+a)(x+b)} \, dx = \frac{\ln \frac{b+x}{a+x}}{a-b} + C,$$

se  $a \neq b$

### Raízes

$$\int \sqrt{x} \, dx = \frac{2}{3} x^{3/2}$$

$$\int \sqrt{ax+b} \, dx = \frac{2}{3a} (ax+b)^{3/2}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \, dx = \sin^{-1} \left( \frac{x}{a} \right) + C$$

### Trigonométricas

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$\int \tan x \, dx = \ln|\sec x| + C$$

$$\int \sec x \, dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

$$\int \csc x \, dx = -\ln|\csc x + \cot x| + C$$

$$\int \cot x \, dx = \ln|\sin x| + C$$

$$\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$$

$$\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + C$$

$$\int \csc x \cot x \, dx = -\csc x + C$$

$$\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + C$$

## 4.7 Técnicas de integração

### 4.7.1 Como integrar por substituição

A substituição  $u = g(x)$  converterá  $\int_a^b f(g(x))g'(x) \, dx$  em  $\int_{g(a)}^{g(b)} f(u) \, du$ . Para integrais definidas, **substitua os limites de integração**. Para integrais indefinidas, simplesmente ignore os limites de integração.

**Ex.** Determinar  $\int_1^2 5x^2 \cos(x^3) \, dx$ .

$$u = x^3 \Rightarrow du = 3x^2 \, dx \quad x^2 \, dx = \frac{1}{3} \, du$$

Quando  $x = 1$ ,  $u = x^3 = 1^3 = 1$ . Quando  $x = 2$ ,  $u = 2^3 = 8$ .

$$\int_1^2 5x^2 \cos(x^3) \, dx = \int_1^8 \frac{5}{3} \cos(u) \, du = \left[ \frac{5}{3} \sin(u) \right]_1^8 = \boxed{\frac{5}{3} \sin(8) - \frac{5}{3} \sin(1)}$$

■

### 4.7.2 Como integrar por partes

Como  $\int_a^b u dv = [uv]_a^b - \int_a^b v du$ , escolha  $u$  e  $dv$  na integral original, calcule  $du$  derivando  $u$  e calcule  $v$  usando  $v = \int dv$ .

**Ex. 1:** Determinar  $\int xe^{-x} dx$ .

Escolhemos  $u = x$  e  $dv = e^{-x} dx$ . Assim,  $du = dx$  e  $v = \int e^{-x} dx = -e^{-x}$ .

$$\int xe^{-x} dx = -xe^{-x} + \int e^{-x} dx = \boxed{-xe^{-x} - e^{-x} + C} \quad \blacksquare$$

**Ex. 2:** Determinar  $\int_3^5 \ln x dx$ .

Escolhemos  $u = \ln x$  e  $dv = dx$ , logo  $du = \frac{1}{x} dx$  e  $v = x$ .

$$\int_3^5 \ln x dx = [x \ln x]_3^5 - \int_3^5 dx = 5 \ln(5) - 3 \ln(3) - [x]_3^5 = \boxed{5 \ln(5) - 3 \ln(3) - 2} \quad \blacksquare$$

### 4.7.3 Alguns produtos e quocientes entre funções trigonométricas

Nestes casos, as seguintes identidades costumam ser muito úteis:

$$\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$\sec^2(x) = 1 + \tan^2(x)$$

$$\operatorname{sen}(x) \cos(x) = \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2x)$$

$$\frac{d}{dx} \tan(x) = \sec^2(x)$$

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2}[1 + \cos(2x)]$$

$$\frac{d}{dx} \sec(x) = \tan(x) \sec(x)$$

$$\operatorname{sen}^2(x) = \frac{1}{2}[1 - \cos(2x)]$$

$$\int \tan(x) dx = \ln |\sec x| + C$$

$$\int \sec(x) dx = \ln |\sec x + \tan x| + C$$

Para integrar  $\int \operatorname{sen}^n x \cos^m x dx$ , a estratégia abaixo pode ser útil:

**Se  $n \geq 1$  ímpar**, separe um dos senos e converta o resto dos cossenos usando  $\operatorname{sen}^2(x) = 1 - \cos^2(x)$ , então use a substituição  $u = \cos x$ .

**Se  $m \geq 1$  ímpar**, separe um dos cossenos e converta o resto dos senos usando  $\cos^2(x) = 1 - \operatorname{sen}^2(x)$ , então use a substituição  $u = \operatorname{sen} x$ .

**Se  $n$  e  $m$  ambos pares**, use uma das fórmulas de dobro ou metade de ângulo para reduzir a integral a uma forma que pode ser resolvida.

$$\begin{aligned} \text{Ex.}: \int \frac{\operatorname{sen}^5 x}{\cos^3 x} dx &= \int \frac{\operatorname{sen}^4 x \operatorname{sen} x}{\cos^3 x} dx = \int \frac{(\operatorname{sen}^2 x)^2 \operatorname{sen} x}{\cos^3 x} dx = \\ &= \int \frac{(1 - \cos^2 x)^2 \operatorname{sen} x}{\cos^3 x} dx = (\text{substituição } u = \cos x, du = -\operatorname{sen} x dx) \\ &= \int -\frac{(1 - u^2)^2}{u^3} du = -\int \frac{1 - 2u^2 + u^4}{u^3} du = -\int u^{-3} - \frac{2}{u} + u du = \\ &= \frac{u^{-2}}{2} + 2 \ln |u| + \frac{u^2}{2} + C = \boxed{\frac{\sec^2 x}{2} + 2 \ln |\cos x| - \frac{\cos^2 x}{2} + C} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Para integrar  $\int \tan^n x \sec^m x dx$ , a estratégia abaixo pode ser útil:

**Se  $n$  é ímpar**, separe uma tangente e uma secante e converta o resto para secantes usando  $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ , então use a substituição  $u = \sec x$ .

**Se  $m$  é par**, separe duas secantes e converta o resto para tangentes usando  $\sec^2 x = \tan^2 x + 1$ , então use a substituição  $u = \tan x$ .

**Se  $n$  par e  $m$  ímpar**, use  $\sec^2 x = \tan^2 x + 1$ ,  $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ ,  $\frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x$ ,  $\frac{d}{dx} \sec x = \tan x \sec x$ ,  $\int \tan x dx = \ln |\sec x| + C$ ,  $\int \sec x dx = \ln |\sec x + \tan x| + C$  e, possivelmente, integração por partes.

$$\begin{aligned} \text{Ex.: } \int \tan^3 x \sec^5 x dx &= \int \tan^3 x \sec^5 x dx = \int \tan^2 x \sec^4 x \tan x \sec x dx = \\ &= \int (\sec^2 x - 1) \sec^4 x \tan x \sec x dx = (\text{substituição } u = \sec x, du = \tan x \sec x dx) \\ &= \int (u^2 - 1)u^4 du = \int u^6 - u^4 du = \frac{u^7}{7} - \frac{u^5}{5} + C = \boxed{\frac{\sec^7 x}{7} - \frac{\sec^5 x}{5} + C} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

#### 4.7.4 Substituição trigonométrica

Se a integral contém um dos termos a seguir, use a substituição dada e a identidade associada para converter para uma integral envolvendo funções trigonométricas. Se a integral for definida, lembre-se de substituir os limites de integração!

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{a^2 - b^2 x^2} \Rightarrow x = \frac{a}{b} \sin u, & \sqrt{b^2 x^2 - a^2} \Rightarrow x = \frac{a}{b} \sec u, \\ u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] & u \in [0, \pi] \text{ e } u \neq \frac{\pi}{2} \\ \cos^2 u = 1 - \sin^2 u & \tan^2 u = \sec^2 u - 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \sqrt{a^2 + b^2 x^2} \Rightarrow x = \frac{a}{b} \tan u, \quad u \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ \sec^2 u = \tan^2 u + 1 \end{array}$$

$$\text{Ex.: } \int \frac{16}{x^2 \sqrt{4 - 9x^2}} dx = \int \frac{16}{x^2 \sqrt{2^2 - 3^2 x^2}}, a = 2, b = 3$$

Substituição  $x = \frac{2}{3} \sin u$ , com  $u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $dx = \frac{2}{3} \cos u du$ , logo

$$\sqrt{4 - 9x^2} = \sqrt{4 - 4\sin^2 u} = \sqrt{4\cos^2 u} = 2|\cos u| = 2 \cos u, \text{ pois } \cos u \geq 0 \text{ se } u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\text{Assim, } \int \frac{16}{x^2 \sqrt{4 - 9x^2}} dx = \int \frac{16}{\left(\frac{2}{3} \sin u\right)^2 \cdot 2 \cos u} \frac{2}{3} \cos u du = \int \frac{16 \cos u}{\frac{4}{3} \sin^2 u \cos u} du$$

$$= \int \frac{12}{\sin^2 u} du = 12 \int \csc^2 u du = -12 \cot u + C$$

Como  $x = \frac{2}{3} \sin u$ , então  $u = \sin^{-1} \left(\frac{3}{2}x\right)$ , logo

$$\int \frac{16}{x^2 \sqrt{4 - 9x^2}} dx = -12 \cot u + C = -12 \cot \left(\sin^{-1} \left(\frac{3}{2}x\right)\right) + C = -12 \frac{2\sqrt{1 - \frac{9}{4}x^2}}{3x} + C$$

$$\boxed{= -4 \frac{\sqrt{4 - 9x^2}}{3x} + C}$$

Obs.:  $\cot(\sin^{-1} x) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$  pela tabela na p. 6.  $\blacksquare$

### 4.7.5 Frações parciais

O método das frações parciais permite determinar  $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$  onde  $P(x)$  e  $Q(x)$  são polinômios e o grau de  $P(x)$  é **menor** que o de  $Q(x)$ . (para o caso em que o grau é maior, ver o fim desta seção)

Fatore o denominador mais completamente possível e encontre a decomposição em frações parciais da expressão racional. Integre a decomposição em frações parciais. Para cada fator no denominador, construa os termos na decomposição de acordo com a tabela a seguir.

fator em $Q(x)$	termos	fator em $Q(x)$	termos
$ax + b$	$\frac{A}{ax + b}$	$(ax + b)^k$	$\frac{A_1}{ax + b} + \frac{A_2}{(ax + b)^2} + \dots + \frac{A_k}{(ax + b)^k}$
$ax^2 + bx + c$	$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$	$(ax^2 + bx + c)^k$	$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \dots + \frac{A_kx + B_k}{(ax^2 + bx + c)^k}$

**Ex.:**  $\int \frac{7x^2 + 13x}{x^3 - x^2 + 4x + 4} dx$

Como  $x = 1$  é raiz de  $x^3 - x^2 + 4x + 4$ , então  $x - 1$  é um fator do polinômio. Dividindo  $x^3 - x^2 + 4x + 4$  por  $x - 1$ , obtemos  $x^2 + 4$ . Logo,  $x^3 - x^2 + 4x + 4 = (x - 1)(x^2 + 4)$ .

$$\begin{aligned} \frac{7x^2 + 13x}{x^3 - x^2 + 4x + 4} &= \frac{7x^2 + 13x}{(x - 1)(x^2 + 4)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4} = \frac{A(x^2 + 4) + (Bx + C)(x - 1)}{(x^2 + 4)(x - 1)} \\ &= \frac{Ax^2 + 4A + Bx^2 - Bx + Cx - C}{(x^2 + 4)(x - 1)} = \frac{(A + B)x^2 + (C - B)x + (4A - C)}{(x^2 + 4)(x - 1)} \end{aligned}$$

As frações devem ser equivalentes, logo  $7x^2 + 13x = (A + B)x^2 + (C - B)x + (4A - C)$ , o que nos dá o sistema:  $A + B = 7$      $C - B = 13$      $4A - C = 0$

A solução do sistema é  $A = 4$ ,  $B = 3$ ,  $C = 16$ , logo

$$\begin{aligned} \int \frac{7x^2 + 13x}{x^3 - x^2 + 4x + 4} dx &= \int \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4} dx = \int \frac{4}{x - 1} + \frac{3x + 16}{x^2 + 4} dx = \\ &= \int \frac{4}{x - 1} + \frac{3x}{x^2 + 4} + \frac{16}{x^2 + 4} dx = \boxed{4 \ln |x - 1| + \frac{3}{2} \ln |x^2 + 4| + 8 \tan^{-1} \left( \frac{x}{2} \right) + C} \blacksquare \end{aligned}$$

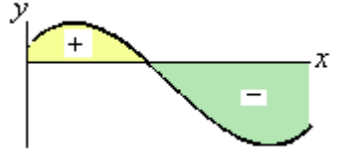
Se, na fração  $\frac{P(x)}{Q(x)}$ , o grau do numerador é maior do que o do denominador, divida  $P(x)$  por  $Q(x)$ , obtendo um quociente  $q(x)$  e um resto  $r(x)$ , ou que implica que  $\frac{P(x)}{Q(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{Q(x)}$ , onde o grau de  $r(x)$  é menor que o grau de  $Q(x)$ .

A integral  $\int q(x) + \frac{r(x)}{Q(x)} dx$  geralmente pode ser facilmente determinada, já que o quociente  $q(x)$  é um polinômio e o termo  $\frac{r(x)}{Q(x)}$  pode ser tratado usando-se a estratégia recém apresentada.

## 5 Aplicações

### 5.1 Área (com sinal) entre uma curva e o eixo horizontal

$\int_a^b f(x) dx$  representa a área com sinal entre  $f(x)$  e o eixo  $X$ . Acima do eixo a área tem sinal positivo e abaixo do eixo, negativo.



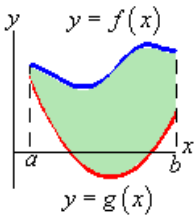
### 5.2 Áreas entre curvas

As fórmulas gerais para cada um dos dois casos principais são:

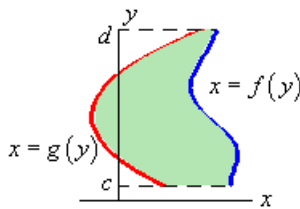
$$y = f(x) \Rightarrow A = \int_a^b (\text{função acima}) - (\text{função abaixo}) dx$$

$$x = f(y) \Rightarrow A = \int_c^d (\text{função à direita}) - (\text{função à esquerda}) dy$$

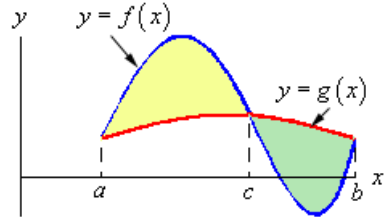
Se as curvas se intersectam então as áreas para cada porção devem ser determinadas individualmente. Temos aqui alguns esboços de situações possíveis e as respectivas fórmulas para a área.



$$\int_a^b f(x) - g(x) dx$$



$$\int_c^d f(y) - g(y) dy$$



$$\int_a^c f(x) - g(x) dx + \int_c^d g(x) - f(x) dx$$

### 5.3 Volumes de revolução

A fórmula principal para o volume é  $\int_a^b A(x) dx$ , onde  $A(x)$  é a área obtida para cada valor de  $x$ .

**Rotação de  $y = f(x)$  em torno do eixo  $X$  (método do disco).** Cada segmento vertical de comprimento  $f(x)$ , rodado em torno do eixo  $X$ , torna-se um disco com área  $A(x) = \pi r^2 = \pi [f(x)]^2$ , logo o volume resultante é

$$\int_a^b \pi [f(x)]^2 dx$$

**Rotação de  $y = f(x)$  em torno do eixo  $Y$  (método da casca cilíndrica).** Cada segmento vertical de comprimento  $f(x)$ , rodado em torno do eixo  $Y$ , torna-se um cilindro com área  $A(x) = 2\pi r h = 2\pi x f(x)$ , logo o volume resultante é

$$\int_a^b 2\pi x f(x) dx$$





